Внеписанные окружности

Теорема 1. В любом треугольнике биссектрисы двух внешних углов и биссектриса внутреннего угла, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.
Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и продолжим, например, стороны BA и BC за точки A и C соответственно (рис.1).

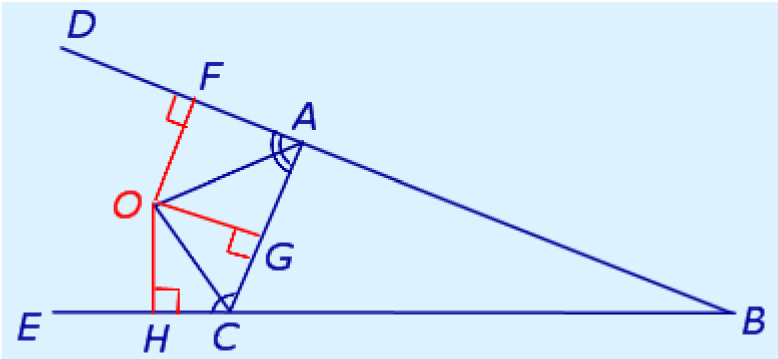

Рис.1

Проведём биссектрисы углов DAC и ECA, которые являются внешними углами треугольника ABC. Обозначим точку пересечения этих биссектрис буквой O. Докажем, что точка O лежит на биссектрисе угла ABC, который является внутренним углом треугольника ABC, не смежным с внешними углами DAC и ECA. С этой целью опустим из точки O перпендикуляры OF, OG и OH на прямые AB, AC и BC соответственно. Поскольку AO – биссектриса угла DAC, то справедливо равенство:

$$OF = OG,$$

Поскольку CO – биссектриса угла ACE, то справедливо равенство:

$$OF = OG,$$

Следовательно, справедливо равенство

$$OG = OH,$$

откуда вытекает, что точка O лежит на биссектрисе угла ABC, что и требовалось доказать.

Замечание 1. В ходе доказательства теоремы 1 мы установили, что справедливы равенства

$$OF = OG = OH,$$

откуда вытекает, что точки F,G и H ***лежат на одной окружности*** с центром в точке O.
Определение. Окружность называют окружностью, вневписанной в треугольник, или вневписанной окружностью, если она касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон (р.2).

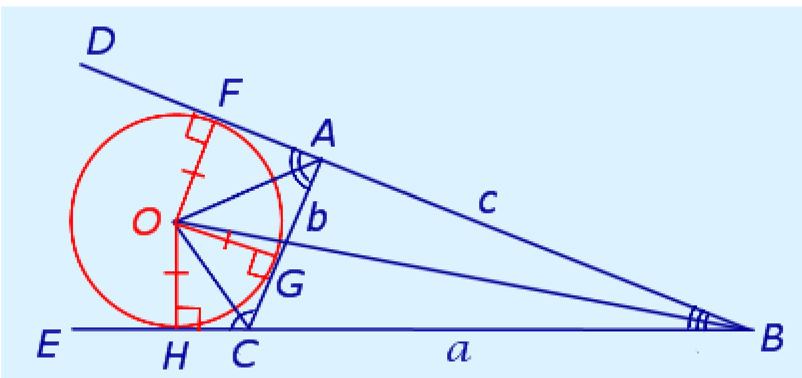

Рис.2

Замечание 2. У каждого треугольника существуют ***три вневписанных окружности***. На рисунке 2 изображена одна из них.

Замечание 3. Центр вневписанной окружности, изображенной на рисунке 2, лежит на биссектрисе угла B, а окружность касается стороны b. Для удобства обозначений и терминологии будем называть эту окружность вневписанной окружностью, касающейся стороны b, и обозначать её радиус символом r_b .

Теорема 2. Пусть вневписанная окружность касается стороны AC треугольника ABC. Тогда отрезки касательных от вершины B до точек касания с вневписанной окружностью равны полупериметру треугольника.

Доказательство. Снова рассмотрим рисунок 2 и докажем, что выполнено равенство

$$BF = BH = \frac{a+b+c}{2},$$

где a, b, c – стороны треугольника ABC. Действительно, отрезки AG и AF равны, как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки A. Отрезки CG и CH равны, как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки C. Отрезки BF и BH равны, как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки B. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} BF = BA + AF = BA + AG \\ BH = BC + CH = BC + CG \\ BF = BH \end{cases} \Rightarrow BF = BH = \frac{1}{2}\left(BA + AG + BC + CG\right) = \frac{a+b+c}{2} = p,$$

где буквой p обозначен полупериметр треугольника ABC. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Радиус вневписанной окружности , касающейся стороны b, вычисляется по формуле

$$r_b = \frac{S}{p-b},$$

где буквой S обозначена площадь треугольника ABC, а буквой p обозначен полупериметр треугольника ABC.

Доказательство. Снова рассмотрим рисунок 2 и заметим, что выполнены равенства

$$\begin{gathered} S = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BFO} + S_{\Delta BHO} - S_{\Delta AFO} - S_{\Delta AGO} - S_{\Delta CGO} - S_{\Delta CHO} = \\ = \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot FB + \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot BH - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot AF - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot AG - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot CG - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot CH = \\ = \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot p + \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot p - \frac{1}{2} \cdot r_b\left(AF + AG + CG + CH\right) = r_b \cdot p - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot 2 \cdot b = \\ = r_b\left(p - b\right). \end{gathered}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$r_b = \frac{S}{p-b},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Радиусы двух других вневписанных в треугольник ABC окружностей вычисляются по формулам:

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Теорема 4. Если обозначить буквой r радиус вписанной в треугольник ABC окружности, то будет справедлива формула:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Доказательство. Поскольку

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c},$$

то

$$\frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}, \quad \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}.$$

Складывая эти формулы и воспользовавшись формулой для радиуса вписанной окружности

$$r = \frac{S}{p},$$

получим

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Площадь треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}.$$

Доказательство. Перемножим формулы

$$S = rp, \quad S = r_a(p-a), \quad S = r_b(p-b), \quad S = r_c(p-c),$$

и воспользуемся формулой Герона:

$$S^4 = r \cdot p \cdot r_a(p-a) r_b(p-b) r_c(p-c) = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot S^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad S^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если обозначить буквой R радиус описанной около треугольника ABC окружности, то будет справедлива формула:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R\ .$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами для радиусов вписанной и вневписанных окружностей, а также формулой Герона, получим

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = S\cdot\left[\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right)+\left(\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}\right)\right] =$$
$$= S\cdot\left[\left(\frac{p-b+p-a}{(p-a)(p-b)}\right)+\left(\frac{p-(p-c)}{(p-c)p}\right)\right] = S\cdot\left[\frac{c}{(p-a)(p-b)}+\frac{c}{(p-c)p}\right] =$$
$$= Sc\cdot\frac{(p-c)p+(p-a)(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)p} = \frac{Sc}{S^2}\cdot\left[(p-c)p+(p-a)(p-b)\right] =$$
$$= \frac{c}{S}\cdot\left[p(p-c)+(p-a)(p-b)\right].$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратной скобке:

$$p(p-c)+(p-a)(p-b) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)+b\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(a+b)^2-c^2\right]+\frac{1}{4}\left[c^2-(a-b)^2\right] = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right] = \frac{1}{4}\cdot 4ab = ab.$$

В результате получаем равенство

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{S}.$$

Поскольку радиус описанной окружности удовлетворяет равенству

$$R = \frac{abc}{4S},$$

то справедлива формула

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R\ ,$$

что и требовалось доказать.