Теорема Наполеона

Наполеон Бонапарт

Эту красивую теорему приписывают известному великому полководцу и государственному деятелю Наполеону Бонапарту. С учетом того, что Наполеон был артиллеристом, неудивительно, что он увлекался геометрией. Бонапарт считается также автором задачи о делении на четыре равные части окружности с помощью одного лишь циркуля.
Тем не менее, впервые опубликовал эту теорему У. Резерфорд в публикации в “The Ladies’ Diary” в 1825 году, спустя 4 года после смерти Наполеона, так что возможно, что ее автором является и не полководец.

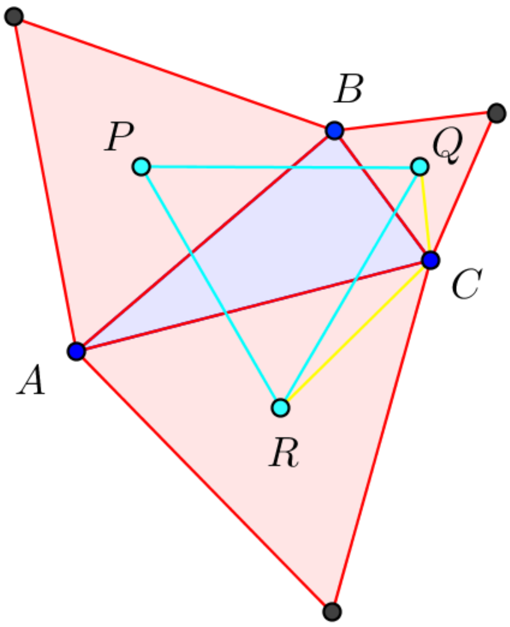
В различных источниках приводятся разные доказательства теоремы Наполеона. Чаще всего можно встретить доказательства, основанные на свойствах поворота или использующие комплексные числа. Привожу здесь доказательство, которое кажется мне наиболее простым и доступным для школьников. Все, что нужно для понимания его — знание теоремы косинусов.

Теорема Наполеона. ***На сторонах произвольного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Центры этих треугольников являются вершинами еще одного равностороннего треугольника.***

Доказательство. Обозначим длины сторон треугольника ABC следующим образом:

$$|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b.$$

Центры построенных равносторонних треугольников обозначим через P, Q и R.



Найдем $|QR|$ из треугольника CRQ. Имеем

$$|QC| = \frac{2}{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(здесь пользуемся тем, что медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, кроме того, в равностороннем треугольнике медиана является и высотой) и

$$|CR| = \frac{2}{3} \cdot b\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Кроме того,

$$\angle QCR = \angle C + \angle QCB + \angle RCA = \angle C + \frac{\pi}{3},$$

$$\cos\angle QCR = -\frac{1}{2}\cos\angle C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle C.$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$

$$\cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Из формулы для площади треугольника ABC $S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C$

$$\sin\angle C = \frac{2S}{ab}.$$

Находим $|QR|^2$:

$$|QR|^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2S}{ab}\right) =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}}.$$

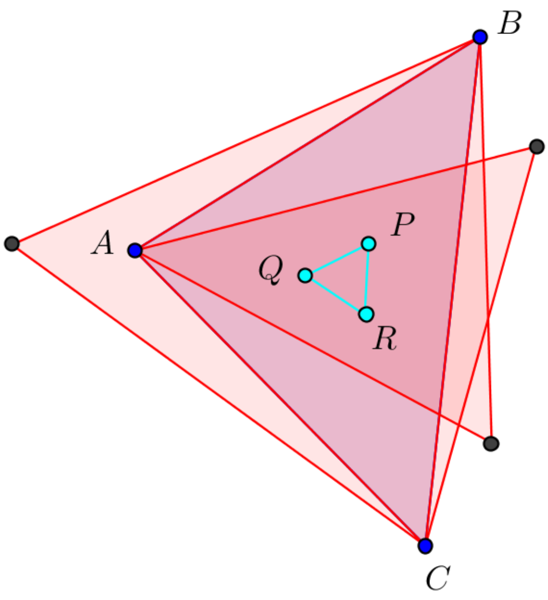
Поскольку выражение для $|QR|$ симметрично относительно a, b и c (а можно еще два раза проделать выкладки), получаем

$$|PQ|^2 = |PR|^2 = |QR|^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2S}{\sqrt{3}},$$

то все стороны треугольника PQR равны, что и требовалось доказать.

Нужно отметить, что теорема Наполеона остается справедливой, если строить равносторонние треугольники не вовне, а вовнутрь. Доказывается она аналогично. Для стороны треугольника получается выражение

$$|PQ|^2 = |PR|^2 = |QR|^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} - \frac{2S}{\sqrt{3}}.$$



Источники: http://en.wikipedia.org/wiki/Napoleon’s_theorem
http://botanikliferu.504.com1.ru:8025/WWW/cie/vestnik/pdf/2006/n6p3/Lakoba-n6p3.pdf