

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin(\pi - (\alpha + \gamma))} = \frac{b}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\pi - (\alpha + \gamma))} = \frac{b}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

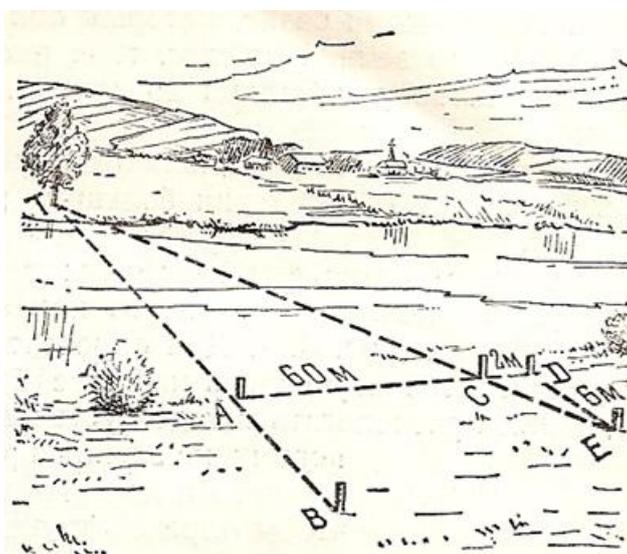
$$tg \gamma = d/x \quad x \cdot tg \gamma = d$$

$$tg \alpha = d/(b-x) \quad (b-x) \cdot tg \alpha = d$$

$$d \cdot \left(1 + \frac{tg \alpha}{tg \gamma}\right) = b tg \alpha$$

$$d = \frac{b \cdot tg \alpha \cdot tg \gamma}{tg \alpha + tg \gamma} = \frac{b \cdot tg \alpha \cdot tg \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

$$d = b \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$



**Willebrord Snell**  
(1580-1626)

## Историческая справка.

Впервые в 1617г. предложил использовать метод подобия треугольников при проведении геодезических измерений голландский математик, физик и астроном Виллеброрд Снелл Ван Ройен. Он родился в Нидерландах в 1580г. в Лейдене в семье профессора математики. В 1613г. стал преемником отца на должности профессора Лейденского университета. В его работе « Голландский Эратосфен », опубликованной в 1617г., описывался метод триангуляции.

Астролябия - сложный угломерный инструмент для определения положения звезд. Он появился еще в Древней Греции. К IX в. астролябия получила широкое распространение в странах арабского Востока, где с ее помощью решали многие практические задачи. Например, определяли время, продолжительность дня и ночи, измеряли горизонтальные углы на поверхности Земли, осуществляли различные математические вычисления.



Приблизительно в X в. восточные астролябии попали в Испанию, а затем стали известны в других странах Западной Европы. Со временем их стали изготавливать и в европейских мастерских. Первоначально эти инструменты были лишь копиями с арабских, и только в XVI в. в Европе начали создавать астролябии по собственным расчетам и по собственному проекту. При этом уделялось большое внимание художественной стороне, поэтому астролябии стали

предметом моды и коллекционирования при королевских дворах. Одним из лучших инструментальщиков того времени был фламандский мастер Гуалтерус Арсениус (1530 - 1580). Он выполнял заказы испанского короля Филиппа II и других знатных особ, которые воспринимали астролябии, прежде всего как астрологические инструменты.

На сегодняшний день в мире известна 21 астролябия Арсениуса. Одна из них, изготовленная в 1568 г., принадлежала австрийскому полководцу времен Тридцатилетней войны (1618-1648) Альбрехту Валленштейну. В XIX в. она хранилась у великой княгини Елены Павловны и была преподнесена ею в дар Публичной библиотеке (сейчас - Российской национальной библиотеке), откуда и поступила в музей М.В. Ломоносова.

Диаметр астролябии 33,5 см.

Она включает следующие части:

- основание - диск с бортом и подвесным кольцом для точной ориентировки прибора относительно горизонта;

- три тимпана - плоские диски с выгравированными проекциями небесных координат для широт европейских городов 510, 51015', 520;
- решетку-проекцию небесной сферы северного полушария с указанием положения 45 наиболее ярких звезд, с зодиакальным кругом;
- алидаду - визирную линейку;
- ось, соединяющую все детали.

На вершине астрольбии изображены две фигуры - Фавна и Фавны, в античной мифологии их связывали с даром предсказания.

В основании трона - подпись мастера: "G.A. neros Gemm50086 Fris50111 Louan50111 Fecit anno 1668."

Астрольбия Арсениуса, выполненная с удивительной точностью и художественным мастерством, - единственная в нашей стране.

## **Определение расстояний до тел Солнечной системы и размеров этих небесных тел**

Измерение расстояний триангуляционным методом используется в астрономии для определения расстояний до тел Солнечной системы, а так же для размеров небесных тел.

Для измерения расстояний до планет астрономы используют базисы, превышающие радиус земного шара. Наибольший базис, которым они располагают, представляет собой диаметр земной орбиты, т.е. расстояние от одной точки на пути Земли вокруг Солнца до другой, достигаемой Землей через полгода.

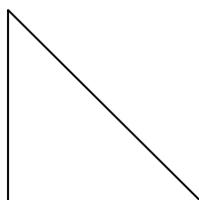
Измерения такого рода являются пределом, который может быть достигнут при определении больших расстояний геометрическим методом.

Используя базис для измерения расстояния до какого-нибудь объекта, мы должны определить направление на объект с обеих концов базиса. Теперь необходимо найти ориентир. Для этого используем хорошо нам знакомое обстоятельство. Когда мы едем в автомобиле с большой скоростью, то близко расположенные к нам объекты представляются движущимися относительно нас в противоположном направлении, а далеко находящиеся от нас кажутся неподвижными. Подобным же образом, очень удаленные от нашей Солнечной системы звезды, кажутся нам неподвижными, а близко расположенные звезды и планеты кажутся перемещающимися по небосклону. Итак, неподвижные звезды мы можем выбирать в качестве ориентира.

Если мы измерили длину базиса и знаем направление на удаленную звезду с каждого конца базиса, то можно найти расстояние до объекта ( звезды или планеты ).

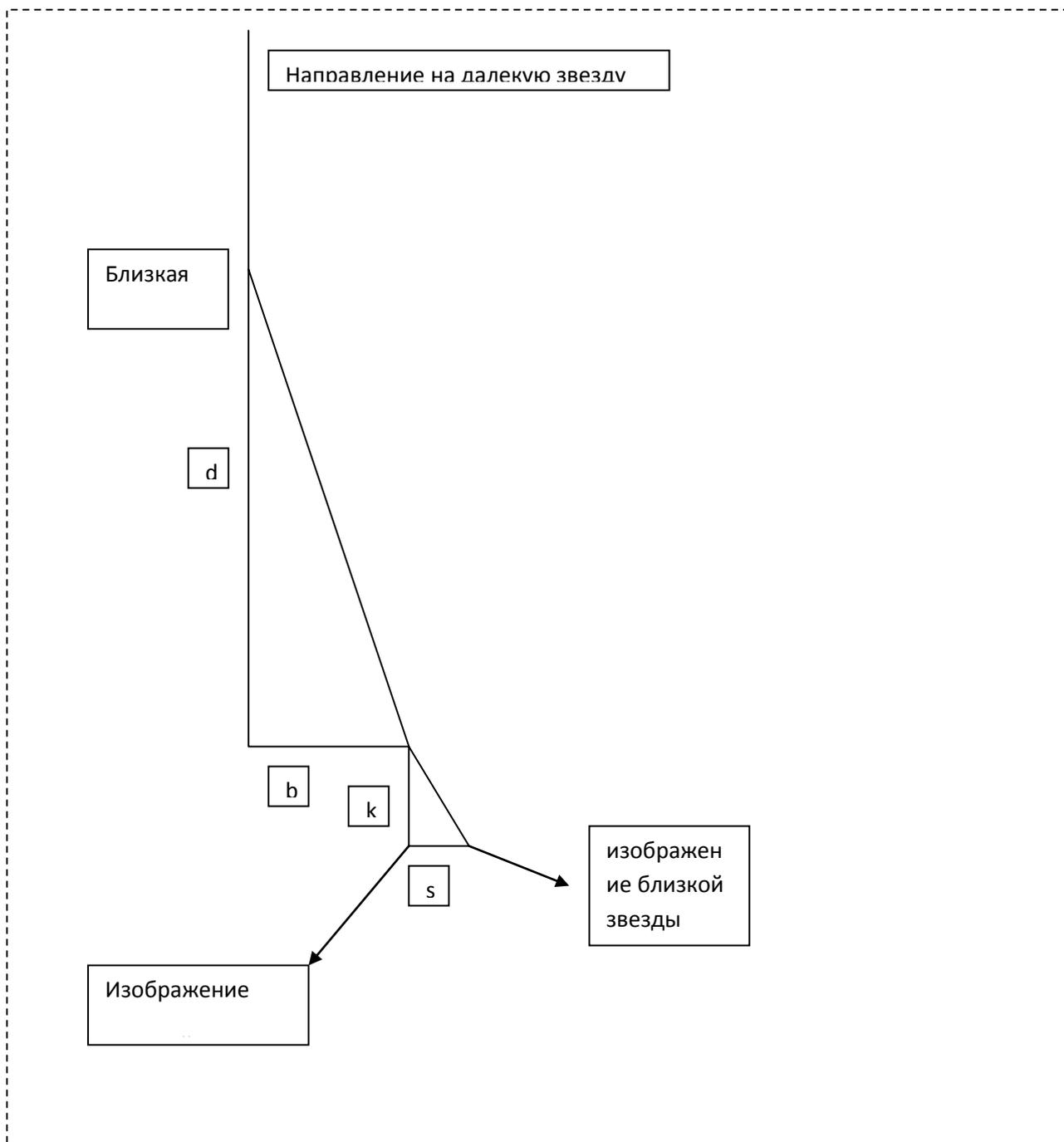
*Удаленная*

звезда



Базис

Для определения расстояния до близкой звезды или планеты геометрическим методом астрономы используют фотокамеры. Рассмотрим идею этого метода.



$d$  – расстояние до близкой звезды

$b$  – диаметр земной орбиты

$k$  – длина пути света в фотокамере

$s$  – расстояние между изображениями далекой и близкой звезд

Треугольники, изображенные на рисунке, подобны, поэтому

$$s/b = k/d \quad \text{или} \quad d = bk/s$$

В какой-то момент времени астроном видит через объектив фотоаппарата, что одна из близких звезд лежит на линии, проходящей через центр объектива и через далекую звезду, делает снимок. Затем астроном ожидает полгода, чтобы Земля оказалась на другом конце базиса, и фотографирует далекую звезду, направление на которую должно остаться прежним. Поскольку Земля движется, обе звезды, близкая и далекая, уже не лежат на одной прямой, соединяющей близкую звезду и центр

объектива, поэтому на снимке получаются два отдельных изображения близкой звезды. Затем по формуле находим  $d$ .

Этим методом можно измерить расстояние лишь до нескольких сотен звезд, расположенных очень близко к Земле. Для измерения больших расстояний во Вселенной применяются другие методы.

### Другие практические применения триангуляции

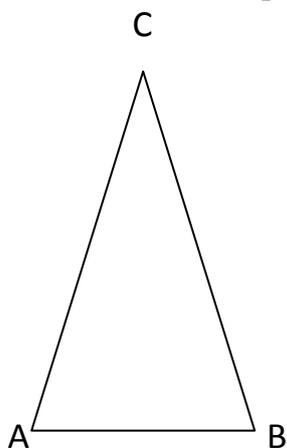
Триангуляционный метод измерения используется в геодезии. Метод определения положения геодезических пунктов построением на местности систем смежно расположенных треугольников, в которых измеряют длину одной стороны ( по базису ) и углы, а длины других сторон находят тригонометрический.

Геодезия – это наука об определении формы и размеров Земли и об измерениях на земной поверхности для отображения ее на планах и картах. Именно в этом разделе и используется триангуляция, в топографии, картографии, инженерном деле и др.

Конечно геометрические методы измерения на практике намного сложнее тех, что мы рассматривали в нашей работе, мы разбирали принцип триангуляционного метода. На практике же при измерениях на местности используют сложные приборы, позволяющие измерять горизонтальные углы. Геодезические инструменты, отвечающие таким требованиям, называются теодолитами.

При геодезических работах измеряют не углы между сторонами на местности, а их ортогональные проекции.

В астрономии при определении расстояния до недоступного объекта прибегают к методу определения расстояний по параллаксам света.



$AB$  – базис. Из точек  $A$  и  $B$  угломерным геодезическим инструментом измеряют углы  $CAB$  и  $CBA$ . Таким образом, в треугольнике  $ABC$  известны два угла и сторона. Остальные элементы треугольника  $ABC$  можно вычислять по формулам тригонометрии.

Угол  $ACB$ , под которым из недоступного места виден базис, называется параллаксом. В пределах Солнечной системы в качестве базиса используют экваториальный радиус Земли.

## Литература

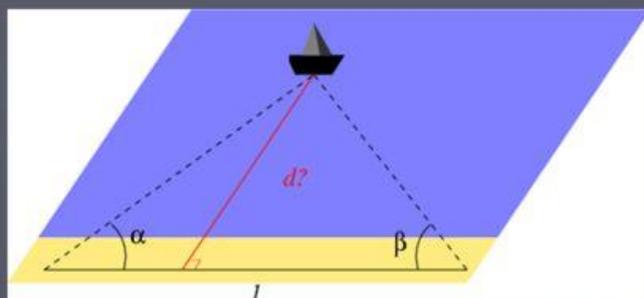
1. Геометрия: учебник для 7-9 кл. средней шк. Автор Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов и др. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1994.
2. Геометрия: учебник для 7-9 кл. общеобр.учрежд./ А.В.Погорелов В. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2007, - 224с.: ил.
3. Физика: вселенная. Перевод с английского под ред. А.С. Ахматова Издательство «Наука» Москва 1973.
4. Астрономия: учеб. для 11 кл. общеобр.учрежд. / В.В. Порфирьев.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Просвещение, 2003. – 174 с.: ил.
5. Геометрия в таблицах. 7-11 кл.: Справочное пособие / Авт.-сост. Л.И.Звавич, А.Р. Рязановский. – 6-е изд., стереотипное – М.:Дрофа,2002.
6. Большой энциклопедический словарь: математика. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1988.
7. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. - 2-е изд. М.: 1966.

### Электронные источники:

1. Электронная энциклопедия: Star World.
2. Internet.
3. Википедия свободная энциклопедия.

### Триангуляция - что это такое?

## Что такое триангуляция?



Тригонометрическая операция для определения месторасположения по двум точкам, находящимся на известном расстоянии друг от друга

Традиционно, триангуляция использовалась в геодезии и навигации



MyShared

Существует множество областей, в которых применяются тригонометрия. Например, метод триангуляции используется в астрономии для измерения расстояния до ближайших звезд, в географии для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах. Синус и косинус имеют фундаментальное значение для теории периодических функций, например при описании звуковых и световых волн.

Тригонометрия используется в астрономии (особенно для расчётов положения небесных объектов, когда требуется сферическая тригонометрия), в морской и воздушной навигации, в теории музыки, в акустике, в оптике, в анализе финансовых рынков, в электронике, в теории вероятностей, в

статистике, в биологии, в медицинской визуализации (например, компьютерная томография и ультразвук), в аптеках, в химии, в теории чисел, в метеорологии, в океанографии, во многих физических науках, в межевании и геодезии, в архитектуре, в фонетике, в экономике, в электротехнике, в машиностроении, в гражданском строительстве, в компьютерной графике, в картографии, в кристаллографии, в разработке игр и многих других областях.

Для измерения достаточно больших расстояний на земной поверхности можно использовать метод, состоящий в том, что определяется, сколько раз какой-то стандарт длины укладывается «конец к концу» на измеряемом расстоянии.

Этот метод часто применяется при межевании, но во многих случаях он оказывается неудобным.

Для определения расстояния до какого-нибудь объекта, расположенного за рекой, или для измерения высоты горы, для определения расстояния до звезды мы можем использовать очень простой косвенный метод. Этот метод, основанный на геометрических свойствах треугольника, называется триангуляцией.

Что собой представляет триангуляция? Следует отметить, что это слово имеет несколько значений. Так, оно используется в геометрии – следовательно, и в **астрономии**, геодезии и информационных технологиях.

Итак, начинаем разбирать, что собой представляет триангуляция. Что это такое в геометрии?

Допустим, у нас есть неразвертываемая поверхность. Но при этом необходимо иметь представление о её строении. А для этого нужно развернуть её. Звучит невозможно? А вот и нет! И в этом нам поможет метод триангуляции. Следует отметить, что его использование предоставляет возможность построить только приближенную развертку. Метод триангуляции предусматривает использование примыкающих один ко второму треугольников, где можно вымерять все три угла. При этом должны быть известны координаты как минимум двух пунктов. Остальные подлежат определению. При этом создаётся или сплошная сеть, или цепочка треугольников.

