Задачи геометрического построения с помощью компьютера
(дидактический материал для учащихся старшего звена группы дополнительного образования, занимающейся по программе “Практическая физика”)

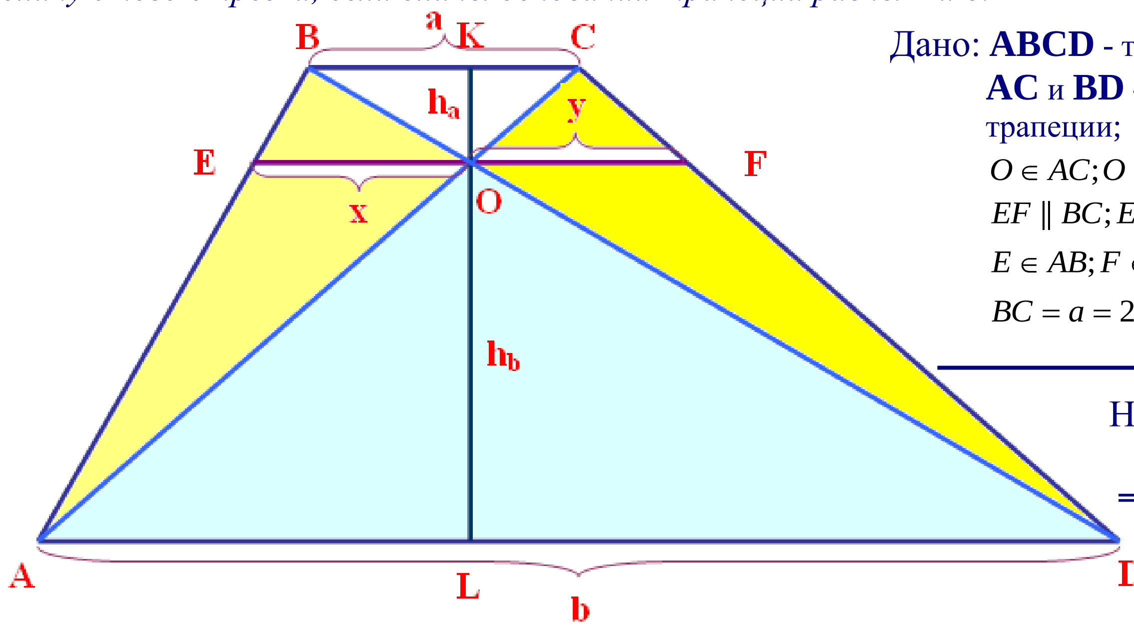
Экелекян Варужан Левонович
заведующий лабораторией физики,
кандидат физико-математических наук,

В рамках уже установившейся в ДНТТМ традиции, из школьных учебников берется задача или пример, приводится ее оригинальное решение и далее делается обобщение с целью выявления контуров переноса этой задачи на плоскость в данном случае предмета информационных технологии. Таким образом, осуществляется идеология интегрированного обучения таких предметов как математика, физика, информатика и т.д.

Работа состоит из трех частей: 1) оригинальное решение определенной геометрической задачи; 2) на базе результатов первой части решение трех геометрических задач построения; 3) оригинальная реализация решения задач второй части в рамках программы текстового редактора Microsoft Word.

I. Геометрическая задача:

Отрезок линии, параллельной основаниям трапеции, заключенной между боковыми сторонами трапеции проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Найдите длину этого отрезка, если длины оснований трапеции равны 2 и 8.



Дано: **ABCD** - трапеция;
AC и **BD** - диагонали трапеции;
$O \in AC; O \in BD; O \in EF;$
$EF \parallel BC; EF \parallel AD;$
$E \in AB; F \in CD;$
$BC = a = 2; AD = b = 8.$

Найти: **EF**

Решение.

Проведем высоту **KL** трапеции **ABCD**: $KL \perp AD$. Тогда отрезки **KO** = $\mathbf{h_a}$ и **OL** = $\mathbf{h_b}$ будут высотами треугольников **BCO** и **FOD**. С другой стороны очевидно, что

$$\mathbf{KL} = \mathbf{h} \text{ и } \mathbf{h} = \mathbf{h_a} + \mathbf{h_b}. \quad (0)$$

Введем обозначения

$$EO = x \text{ и } OF = y.$$

Вследствие параллельности отрезков **AD, BC** и **EF** следует подобие треугольников:

$$\Delta AOD \sim \Delta BOC;\ \Delta AEO \sim \Delta ABC;\ \Delta EBO \sim \Delta ABD;\ \Delta DOF \sim \Delta DBC;\ \Delta OCF \sim \Delta ACD.$$

В этих пяти пар подобных треугольниках приведем отношения соответствующих сторон (там, где длина отрезка соответствующей стороны обозначена одной буквой, воспользуемся этим обозначением):

$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{a}{b}; \quad (1а) \quad \frac{AO}{OD}=\frac{OC}{OB}, \quad (1б) \quad \frac{x}{AO}=\frac{a}{AC}, \quad (2) \quad \frac{x}{BO}=\frac{b}{BD}, \quad (3) \quad \frac{OD}{y}=\frac{BD}{a}, \quad (4) \quad \frac{OC}{y}=\frac{AC}{b} \quad (5).$$

Перемножим левые и правые части уравнений (2) – (5):

$$\frac{x\cdot x\cdot OD\cdot OC}{AO\cdot BO\cdot y\cdot y}=\frac{a\cdot b\cdot BD\cdot AC}{AC\cdot BD\cdot a\cdot b}\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}=\frac{AO\cdot BO}{OC\cdot OD}$$

и учтем уравнение (1б). Тогда получим

$$x^2=y^2\Rightarrow x=y. \qquad (6)$$

Трапецию **ABCD** представим как наложение двух трапеций **EBCF** и **AEFD** и применим формулу площади трапеции:

$$S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}\cdot h; \quad S_{EBCF}=\frac{a+2\cdot x}{2}\cdot h_a; \quad S_{AEFD}=\frac{2\cdot x+b}{2}\cdot h_b;$$

$$S_{ABCD}=S_{EBCF}+S_{AEFD}; \quad \text{или}$$

$$\frac{a+b}{2}h=\frac{a+2x}{2}h_a+\frac{2x+b}{2}h_b. \qquad (7)$$

Из уравнения (1а) выразим $\mathbf{h_b}$ через $\mathbf{h_a}$: $h_b=\frac{b}{a}h_a$ и подставим в уравнение (7) с учетом условия (0):

$$(a+b)(h_a+\frac{b}{a}h_a)=(a+2x)h_a+(2x+b)\frac{b}{a}h_a\Rightarrow$$

$$(a+b)(a+b)=a(a+2x)+(2x+b)b\Rightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2=a^2+2ax+2bx+b^2\Rightarrow ab=(a+b)x$$

или окончательно

$$EF=2x=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2\cdot 2\cdot 8}{2+8}=3{,}2. \qquad (8)$$

Ответ: EF = 3,2.

II. Геометрические задачи построения:

Решение приведенной задачи позволяет поставить и решить следующую ***первую*** геометрическую задачу построения: даны два отрезка **a** и **b**. Построить отрезок **c**, равный отношению удвоенного произведения длин этих отрезков на их сумму, или, что тоже самое, отношению квадрата среднего геометрического двух чисел на среднее арифметическое этих чисел $c=\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}=\frac{(\sqrt{a\cdot b})^2}{(a+b)/2}=\frac{(x_{ср.геом.a,b})^2}{x_{ср.ариф.a,b}}$.

Аналитическое решение задачи весьма простое, после того как мы решили выше поставленную задачу (см. (8)). Вот алгоритм решения задачи:

1) возьмем две параллельные прямые **u** и **v**,
2) отложим на них отрезки **b** и **a**,
3) соединим концы отрезков, получим трапецию,
4) проведем диагонали трапеции, найдем точку пересечения диагоналей,
5) через эту точку проведем прямую, параллельную основаниям трапеции,
6) отрезок **c**, заключенный между боковыми сторонами и будет искомым.

Приступим к решению ***второй*** геометрической задачи: даны три отрезка **a**, **b** и **c**. Найти такой отрезок **d**, который равняется отношению произведения длин первых двух отрезков на длину третьего отрезка $d = \frac{a \cdot b}{c}$. Решение этой задачи сводится к соотношению (1б). Приведем алгоритм решения этой задачи:

1. на произвольной прямой возьмем произвольную точку **O** и отложим отрезки **b** и **c** по разные стороны этой точки **O**,
2. отметим концы этих отрезков буквами **B** и **D**, соответственно,
3. через точку **O** проведем произвольную прямую и отложим отрезок **a** с точки **O**, для определенности, в правую сторону по отношению отрезка **BD**,
4. конец этого отрезка **a** обозначим через точку **C** и соединим с точкой **B**,
5. через **D** точку проведем прямую, параллельную **BC**,
6. точку пересечения этой прямой с продолжением отрезка **OC** обозначим через букву **A**,
7. отрезок **AO** согласно (1б) будет искомым отрезком **d** с длиной $d = \frac{a \cdot b}{c}$.

Последнюю решенную задачу в некотором смысле можно рассматривать как обратную теорему Фалеса

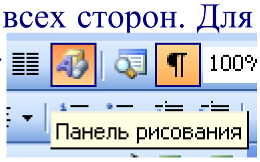
Наконец, приведем ***третью***, последнюю задачу несколько оригинального деления данного отрезка **a** на **3** равные части с помощью линейки и циркуля. Приведем алгоритм решения задачи:

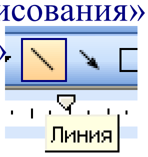
1) возьмем за основу отрезок **a**. На параллельной отрезку **a** линии построим последовательность двух отрезков длиной **a** так, чтобы конец первого отрезка служил началом второго отрезка, т.е. отрезок длиной **2a**;
2) на базе отрезков **a** и **2a** построим трапецию и проведем ее диагонали;
3) через точку **O** пересечения диагоналей проведем линию, параллельную основаниям трапеции. Часть этой линии – отрезок **EF**, заключенный между боковыми сторонами трапеции согласно формуле (8) будет иметь длину $EF = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2a2a}{a+2a} = \frac{4a}{3}$. Четвертая часть отрезка **EF** или половина отрезка **EO** см. (6) и будет искомым. В **Приложении** настоящей работы будет предложен оригинальный способ деления отрезка пополам.

В справедливости последнего утверждения просьба убедиться самостоятельно. Эта задача в основном предлагается с целью демонстрации возможностей компьютерного решения, где в качестве оговоренной линейки будет применяться либо два прямоугольника, либо две трапеции с условием, что их высота (толщина) постоянна.

Изученных трех задачах не приводятся обычные для таких случаев рисунки и чертежи, так как это будет подробно сделано в третьей части работы. Зато хочется указать, что во всех трех случаях можно рассмотреть задачу существования а в отдельных случаях единственности решения.

III. Компьютерная часть работы

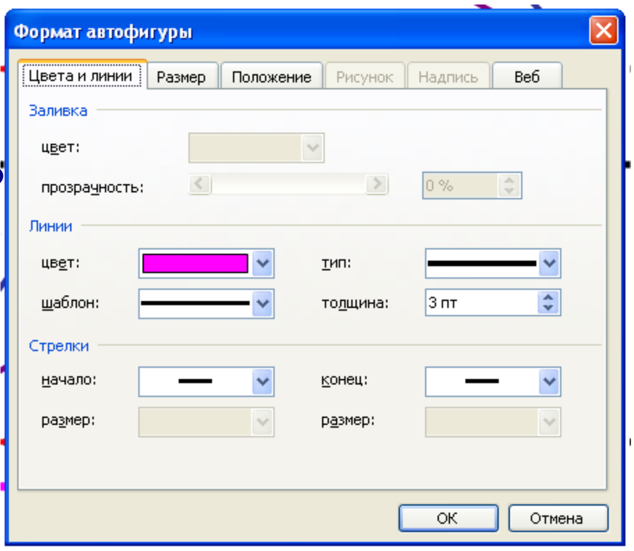
Компьютерное решение предложенных трех задач осуществим в программе текстового редактора Microsoft Word. Для этого в начале создадим новый файл и сразу установим поля скажем по 1,5 см со всех сторон. Для всех 3-х задач общим инструментом будет работа с «Панелью рисования» 

, где большей частью нам понадобиться автофигура «Линия» 

а также интенсивная работа с диалоговым окном.

В этом окне можно задать длины линии, реализовать создание параллельных линий, осуществить всевозможные повороты, регулировать вид, толщину, цвет и другие параметры, имеющие отношение к автофигурам. Собственно говоря это инструментарий и заменяет работу с циркулем и линейкой при решении задач геометрического построения.

Итак, начнем компьютерную реализацию первой задачи, что мы сделаем достаточно подробно, начиная с того что у нас уже имеется специальный файл именем «Задача I.doc». Теперь шаг за шагом проследим за выполнением алгоритма Задачи I.

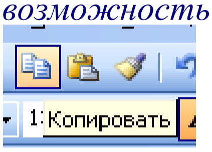


комментарий

Поставим задачу:

через команду «Линия» Панели инструментов «Автофигуры» закажем два горизонтальных отрезка, регулируя их длины через диалоговое окно «Формат автофигуры»

1) возьмем две произвольные параллельные прямые **u** *и* **v**, *для этого используем дополнительную возможность «Копировать или Ctrl + C»*



и «Вставить или Ctrl + V»

2) отложим на эти параллельные прямые **u** *и* **v** *отрезки* **b** *и* **a**,

3) соединим концы отрезков **b** *и* **a**, *получим трапецию,*

4) проведем диагонали трапеции, найдем точку **О** *пересечения диагоналей,*

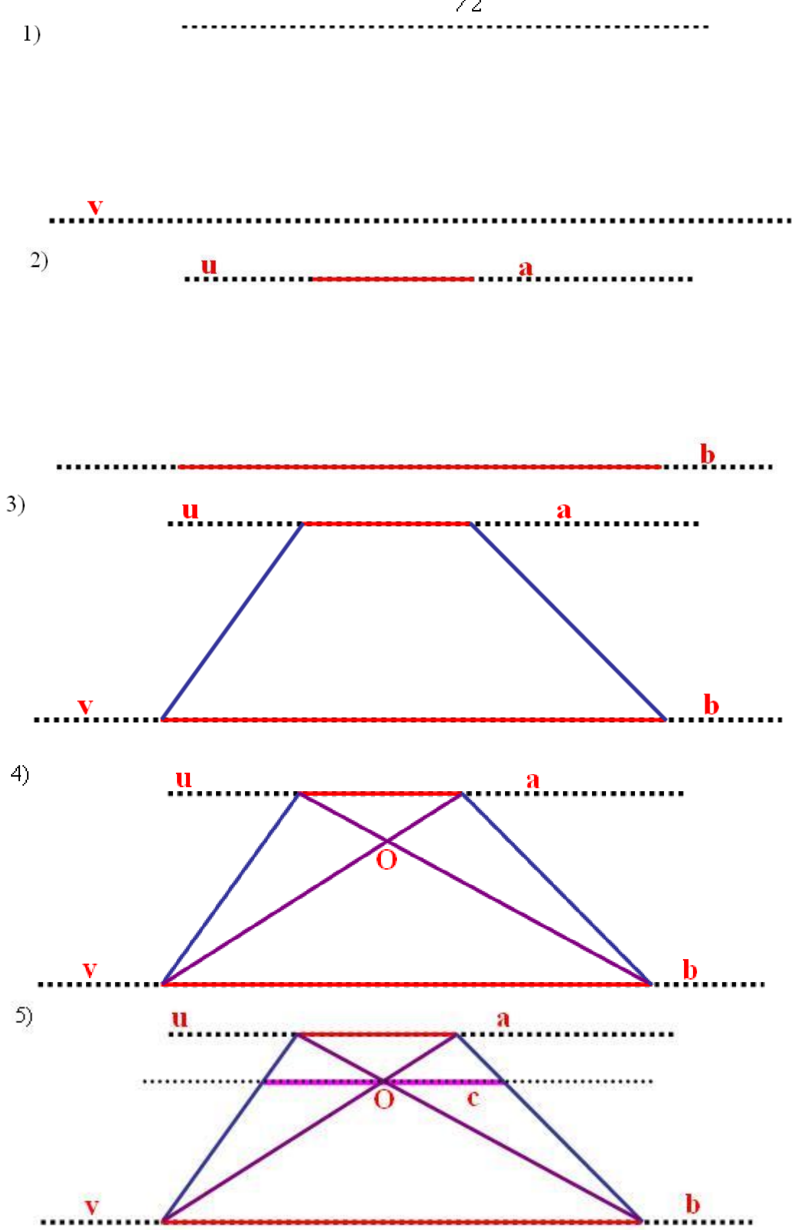
5) через точку **О** *проведем прямую, параллельную основаниям трапеции,*

практическое выполнение заданий в программе “Microsoft Word”

Дано **a** = **3** см

b = **9** см

Найти (построить) $c = \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b} = \frac{\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2}{(a+b)/2} = \frac{\left(x_{ср.геом.д}\right)^2}{x_{ср.арифм.д}}$



Получим ответ:

отрезок **c***, заключенный между боковыми сторонами и будет искомым.*

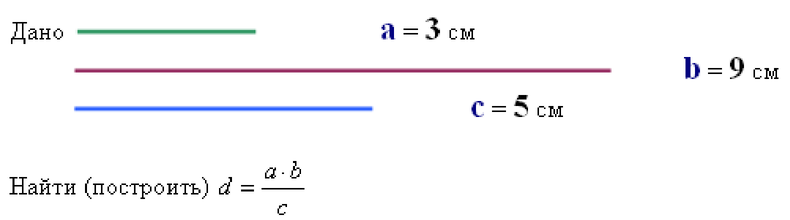
Очевидно, что решение задачи не единственное. После компьютерного решения задачи, можно провести проверку численного значения длины отрезка через «Диалоговое окно», по необходимости можно вычислить абсолютную и относительную погрешность

По той же схеме реализуем решение второй задачи, не забывая соответствующий файл называть «Задача II.doc».

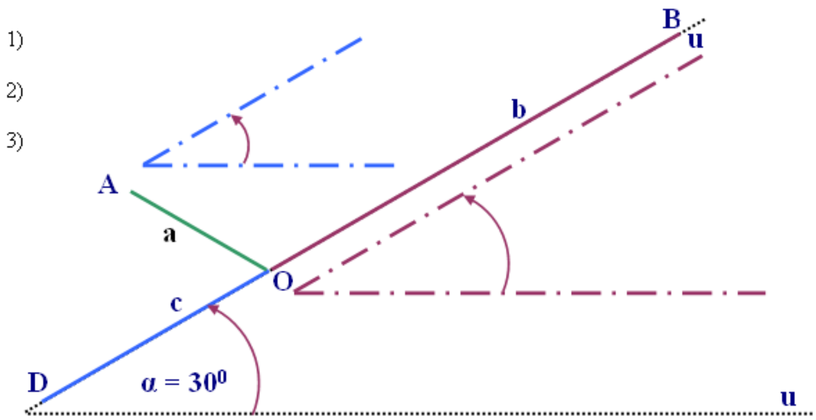
комментарий | практическое выполнение заданий в программе “Microsoft Word”

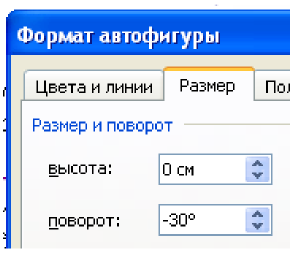
Поставим задачу:

через команду «Линия» Панели инструментов «Автофигуры» закажем три горизонтальных отрезка, регулируя их длины через диалоговое окно «Формат автофигуры»



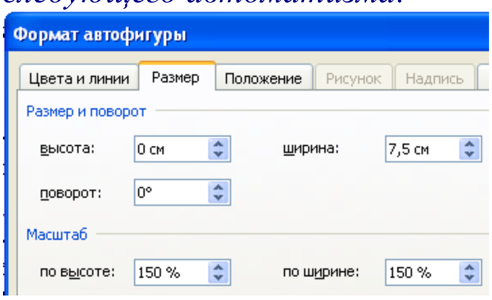
1) – 3) закажем горизонтальную прямую **u** *и подвергнем повороту например на 30^0 против часовой стрелки прямую* **u** *и отрезки* **b** *и* **c**. *Это осуществляется инструментами «Формат автофигуры + Размер + поворот».*

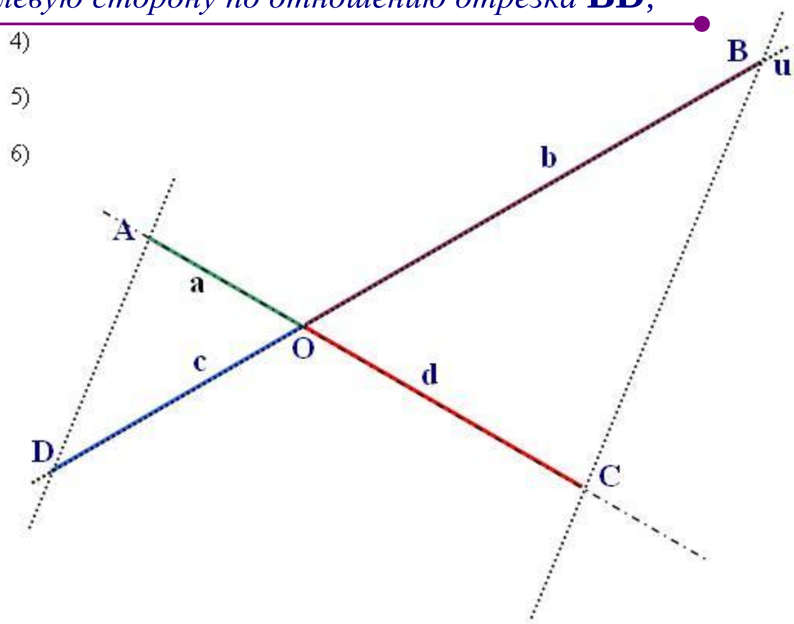




1) На прямой возьмем произвольную точку **O** *и отложим отрезки* **b** *и* **c** *по разные стороны этой точки* **O**,
2) отметим концы этих отрезков буквами **B** *и* **D**, *соответственно,*
3) через точку **O** *проведем произвольную прямую и отложим отрезок* **a** *с точки* **O**, *для определенности, в левую сторону по отношению отрезка* **BD**,

4) конец этого отрезка **a** *обозначим через точку* **A** *и соединим с точкой* **D**,
5) через **B** *точку проведем прямую* **BC**, *параллельную* **AD**, *это реализуется благодаря следующего автоматизма:*





активизируем отрезок **AD** *копируем, вставляем как новый объект, заходим в диалоговое окно «Формат автофигуры» обращаемся к инструменту «Масштаб», следим, чтобы Работал режим «сохранение пропорции» и устанавливаем необходимый размер масштаба. Таким образом полученный отрезок* **BC** *будет параллельным отрезку* **AD**.

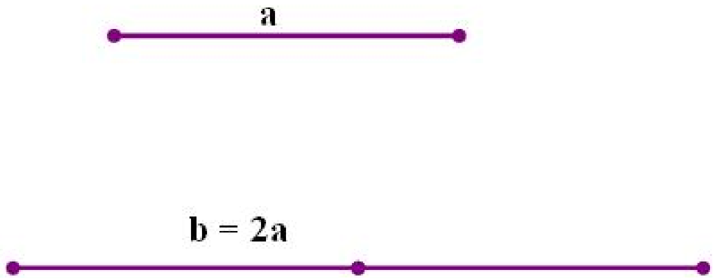
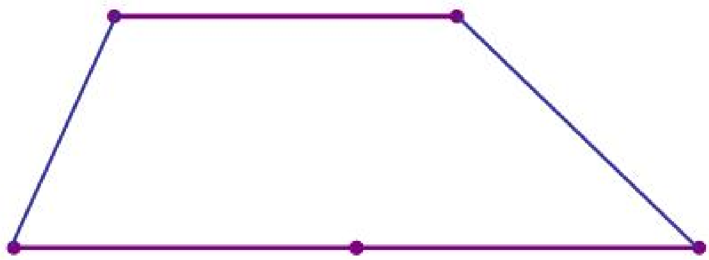
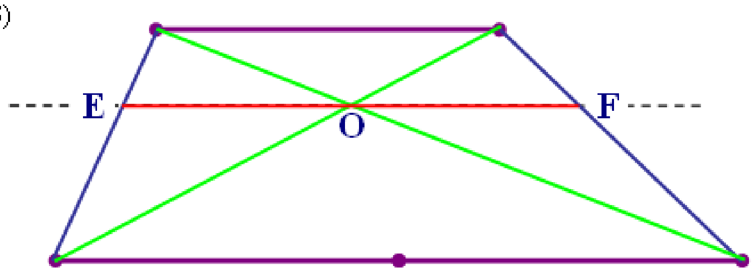
6) точку пересечения прямой **BC** *с продолжением отрезка* **AO** *обозначим через букву* **C**,

Получим ответ:

отрезок **OC** *будет искомым отрезком* **d**.

d = 5,4 см

Начнем демонстрацию компьютерного решения третьей задачи, называя соответствующий файл именем «Задача III.doc».

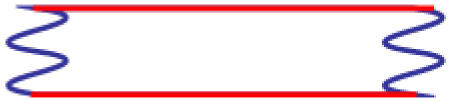
комментарий	практическое выполнение заданий в программе “Microsoft Word”
Поставим задачу: *на рабочем столе нанесем отрезок* **a**	Дано **A** **B** **a** = **5,1** см Найти (построить) $d = \frac{a}{3}$
1) через команду «Линия» Панели инструментов «Автофигуры» закажем два горизонтальных отрезка, регулируя их длины **a** *и* **2a** *через диалоговое окно «Формат автофигуры»*	1) 
2) построим трапецию и проведем ее диагонали;	2) 
3) через точку O пересечения диагоналей проведем линию, параллельную основаниям трапеции.	3) 
Получим ответ: *отрезок* **EF** *четыре раза длиннее искомого отрезка* **d**.	

E **F** EF = 4a/3 = 4d

E **O** EO = 2a/3 = 2d

ПРИЛОЖЕНИЕ

При решении этой задачи для отрезка **EF** получается значение длины равное 6,79 см вместо ожидаемого значения 6,8 см. Следовательно, погрешность составляет 0,14 %, что является весьма точным результатом не только для школьных условий. С другой стороны мы получили отрезок **EO**, который два раза длиннее искомого. Следовательно, возникает задача деления отрезка пополам, которую мы решим как всегда в начале аналитически, а потом и на компьютере, причем поставленную задачу решим несколько оригинальным способом, применяя только линейку без делений, у которой только два параллельных ребра, а два других - не параллельных. Это есть линейка постоянной толщины. Приведем алгоритм решения задачи:



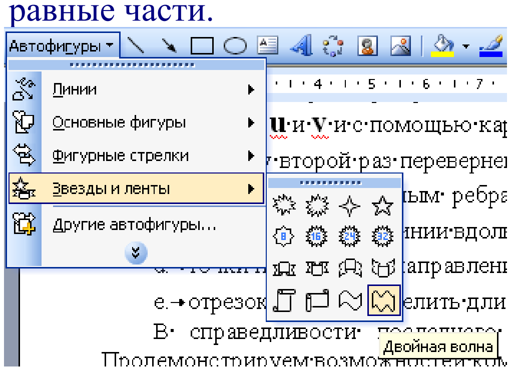
Приведем алгоритм решения задачи:

a. возьмем за основу отрезок **a**, и зафиксируем его концы буквами **E** и **F**;
b. линейку первый раз расположим так, чтобы точки **E** и **F** касались параллельным ребрам **u** и **v** и с помощью карандаша проведем линии вдоль этих ребер;
c. линейку второй раз перевернем на угол больше чем прямой так, чтобы точки **E** и **F** касались параллельным ребрам **u** и **v** уже в обратном порядке. С помощью карандаша проведем линии вдоль этих ребер. Эти направления обозначим через **s** и **t**;
d. точки пересечения направлений **u** и **v** и **s** и **t** обозначим через буквы **A** и **B**;
e. отрезок **AB** будет делить длину отрезка **a** на две равные части.

В справедливости последнего утверждения легко убедиться самостоятельно.

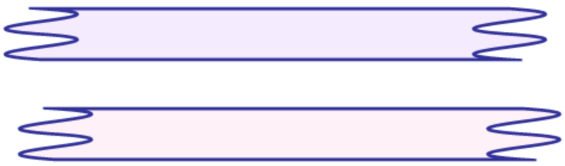
Продемонстрируем возможностей компьютерного решения для трех случаев:

1) произвольная линейка. Эту линейку можно заказать по следующей схеме: Автофигуры / Звезды и ленты / Двойная волна / (последовательность работы в программе “Microsoft Word” без комментарий):

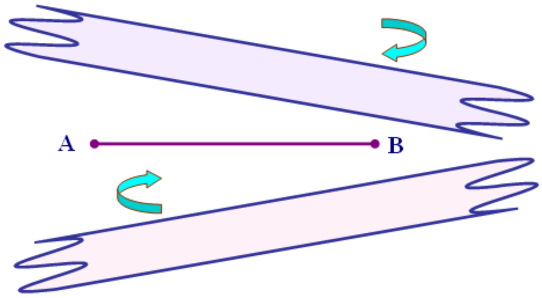


I. (начало)

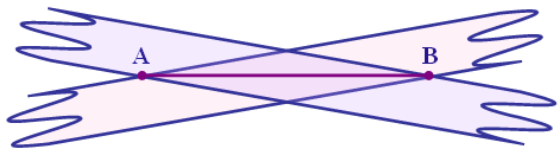
II.



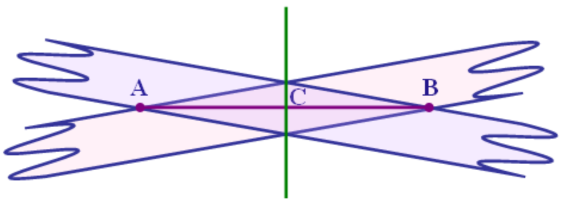
III.



IV.

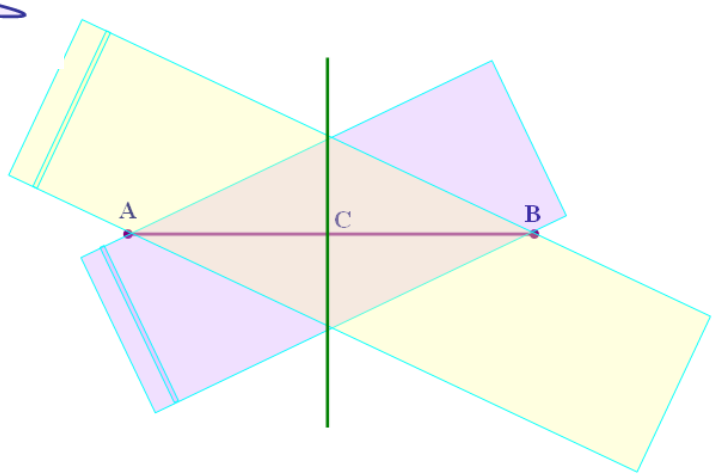


V.

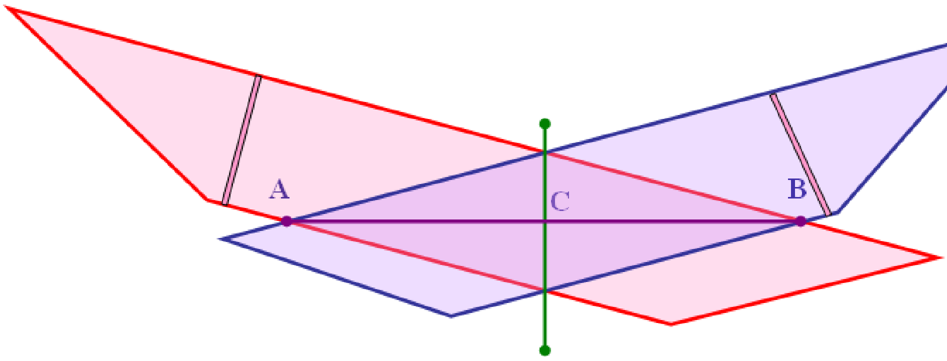


VI. (конец)

2) линейки - два прямоугольника постоянной одной размерности (высоты):



3) линейки - две трапеции с постоянной высотой:



Ясно, что во всех этих случаях одновременно решается еще одна задача построения среднего перпендикуляра к данному отрезку с помощью линейки без делений (масштаба) и только двумя параллельными сторонами.

Литература

Егерев В.К., Зайцев В.В. и др., под редакцией М.И.Сканави, Сборник задач по математике для поступающих в вузы. - Киев: Издательство "Каннон", 1997

Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. - Москва: Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1973

В.Л.Экелекян. Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике 2004 № 37 ИНФОРМАТИКА

В.Л.Экелекян. Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office 2004 № 45 ИНФОРМАТИКА, 2004 № 46 ИНФОРМАТИКА

В.Л.Экелекян. Определение центра масс неправильного тела ***Физика № 48/04***

В.Л.Экелекян. Проверка уравнения теплового баланса ***Физика № 29/04***

В.Л.Экелекян. Относительность движения ***Физика № 1/06***

В.Л.Экелекян. Основы информатики и вычислительной техники – учебно-методические лабораторные разработки-рекомендации для студентов и молодых научных работников-выпускников медицинских институтов Ереван 1988