На урок геометрии с рычажными весами
Экспериментальная проверка уравнения теплового баланса
Резиновый шнур раскручивается на гладкой горизонтальной поверхности

(дидактическая разработка для физических работ, предлагаемых на занятиях группы дополнительного образования, занимающейся по программе “Практическая физика”)

Экелекян Варужан Левонович
заведующий лабораторией физики,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической физики физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова,
профессор Сиракузского университета (штат Нью-Йорк, США)

Уже четыре года, как в группах дополнительного образования ДНТТМ при МГДД(Ю)Т успешно работает схема интегрированного преподавания школьных предметов естественно-научного цикла: физики, математики, химии, биологии, информатики и др. Ученики возраста 8 – 17 лет восприняли результаты данного педагогического эксперимента восторженно, по крайней мере, по трем причинам:

1) в учебном процессе видна органическая связь между предметами,
2) ученик почувствовал и полюбил эффект разнообразия,
3) развивается новое качество - целенаправленно работать и ориентироваться в созданных условиях.

Благодаря публикациям [1 – 22] в журнале «Первое сентября», в других изданиях накопленный опыт передается и обобщается в школах Российской Федерации.

Во время проведения таких интегрированных уроков, решая, например, задачу по математике, учащиеся обязательно следят за тем, чтобы эта задача имела свой образ в какой-нибудь дисциплине, чаще всего это, естественно, физика, а далее при малейшей возможности строится алгоритм проведения расчетов на уроке информатики.

Результаты настоящей работы – это часть методологического подхода автора интегрированного преподавания физики, математики, астрономии и информатики в общеобразовательной школе и учреждениях дополнительного образования. Эта программа прошла большую апробацию. Последняя такая проверка – это участие автора на профессиональном конкурсе педагогических работников МГДД(Ю)Т «Мастерство и творчество» в номинации «Педагог дополнительного образования детей. Моя образовательная программа». Фотография демонстрирует фрагмент

работы мастер-класса «Геометрические соотношения проверяем через взвешивания. Межпредметный подход в преподавании физики в дополнительном образовании детей», организованного автором, где ученики разного возраста и учителя практически выполняют измерения для выявления геометрических закономерностей

Ниже приводится результат такого эксперимента при сочетании геометрии, физики и информатики. Работа состоит из трех частей. В первой части решается геометрическая задача, заимствованная из [1] по курсу геометрии 8 – 9 классов общеобразовательной школы. Во второй части делаются обобщения по этой задаче и осуществляется адаптация к проведению интегрированного урока. Получаем результат, который представляет интерес в курсе физики 9 – 10 классов. Третья часть - лабораторная работа, которая выполняется на уроке информатики. Результаты геометрических расчетов проверяются экспериментально.

1. Немножко геометрии

Задача: На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, построена точка E так, что $DE = \frac{1}{4}BD$. *Через точку E проведена прямая AE, пересекающая сторону BC в точке F. Найти площадь треугольника AFC.*

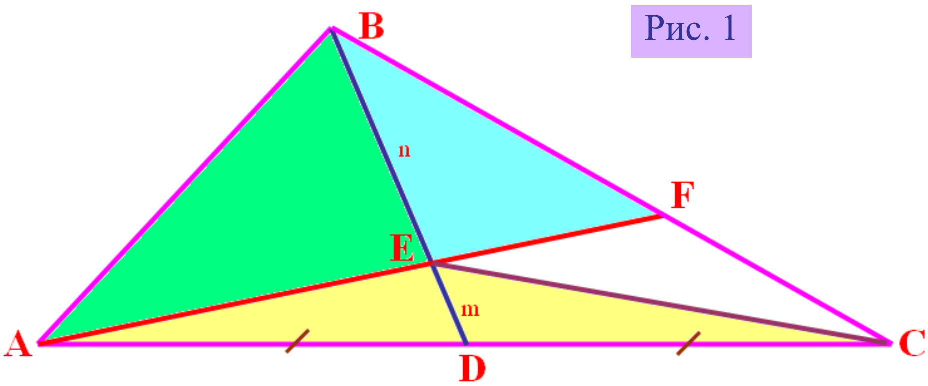


Рис. 1

Дано: ΔABC;

$S_{\Delta ABC} = S$;

$AD = DC$

$DE = \frac{1}{4}BD$

$F \in BC$

Найти: $S_{\Delta AFC}$

Решение:

Для решения этой задачи вспомним, что медиана треугольника - это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника. У медиан треугольника следующие <u>свойства I</u>:

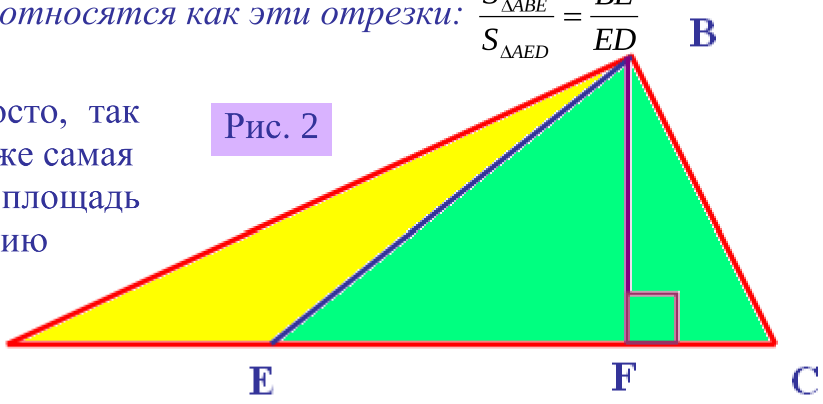
1) медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины;

2) медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади;

3) весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Второй и третий пункты <u>свойства I</u> медианы являются частными случаями более общей теоремы:

Теорема I: *если точка E делит сторону треугольника ABD на отрезки BE и ED, то площади треугольников ABE и AED относятся как эти отрезки:* $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}} = \frac{BE}{ED}$



Доказывается эта теорема просто, так как у треугольников ABE и EBC та же самая высота BF ($BF \perp AC$), а площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту

$$S_{\Delta ABE} = \frac{AE \cdot BF}{2}, \ S_{\Delta EBC} = \frac{EC \cdot BF}{2}.$$

В силу этой теоремы получим следующие соотношения:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{AD}{DC} = 1 \Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC} = S/2;$$

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}} = \frac{BE}{ED} = 3/1 \Rightarrow S_{\Delta ABE} = 3S/8; S_{\Delta AED} = S/8;$$

$$\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{AD}{DC} = 1 \Rightarrow S_{\Delta AED} = S_{\Delta DEC} = S/8.$$

Искомую площадь треугольника AFC обозначим через x: $S_{\Delta AFC} = x$ и применим вышеупомянутую теорему для пар треугольников BAF, FAC и BEF, FEC:

$$\frac{S_{\Delta BAF}}{S_{\Delta FAC}} = \frac{BF}{FC}, \frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta FEC}} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{S_{\Delta BAF}}{S_{\Delta FAC}} = \frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta FEC}} \Rightarrow \frac{S-x}{x} = \frac{S-x-3S/8}{x-S/4}.$$

Решая это уравнение, окончательно получим:

$$(8x-2S)(S-x) = x(5S-8x) \Rightarrow 8x-2S+2x = 5x \Rightarrow$$

$$5x = 2S \Rightarrow \qquad (1)$$

$$x = \frac{2S}{5}.$$

Итак, нам удалось решить задачу на основе неоднократного применения теоремы I и решения линейного алгебраического уравнения.

Ответ: $S_{\Delta AFC} = 2 \cdot S/5$.

2. Обобщенный случай

Теперь решим поставленную выше задачу в более общем случае, когда точка E делит медиану BD в отношении

$$BE = \frac{n}{m} ED.$$

Как в предыдущем случае, требуется найти площадь треугольника AFC, если известна площадь треугольника $S_{\Delta ABC} = S$.

Понятно, что в задаче, рассмотренной в первой части работы, параметры m и n выбраны как:

n = 3, m = 1.

Применим теорему I

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}}=\frac{BE}{ED}=n/m \Rightarrow S_{\Delta ABE}=\frac{n}{2(n+m)}S; S_{\Delta AED}=\frac{m}{2(n+m)}S;$$
$$\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta DEC}}=\frac{AD}{DC}=1 \Rightarrow S_{\Delta AED}=S_{\Delta DEC}=\frac{m}{2(m+n)}S.$$

Далее, аналогично предыдущему случаю, получим уравнение:

$$\frac{S_{\Delta BAF}}{S_{\Delta FAC}}=\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta FEC}} \Rightarrow \frac{S-x}{x}=\frac{S-x-\frac{n}{2(m+n)}S}{x-2\frac{m}{2(m+n)}S}=\frac{2S(m+n)-2x(m+n)-nS}{2x(m+n)-2mS} \Rightarrow$$

$$(S-x)(2xm+2xn-2mS)=(2mS+nS-2xm-2xn)x,$$

решая которое найдем:

$$xn-2mS+2mx=0 \Rightarrow$$
$$x=\frac{2mS}{n+2m} \qquad (2)$$

т.е.

$$S_{\Delta AFC}=x=\frac{2mS}{2m+n} \text{ и } S_{\Delta ABF}=S-x=\frac{nS}{2m+n},$$

а также

$$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}=\frac{n}{2m}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BE}{ED}.$$

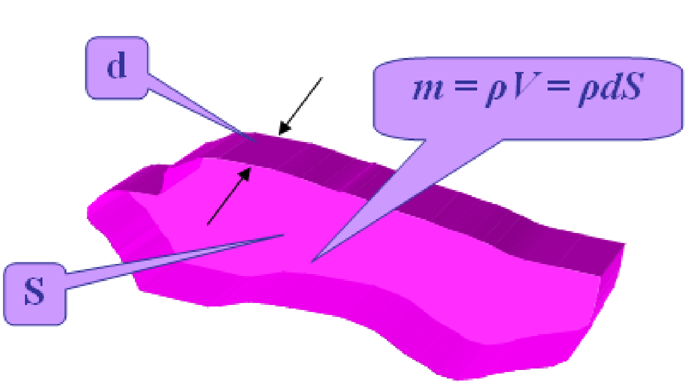
Итак, получили следующий результат, который заслуживает отдельной словесной формулировки:

если точка E *на медиане* BD *треугольника* ABC *делит ее в пропорции* $m:n$, *то отрезок* AF (AE) *делит площади треугольников* ABC *и* ABD *в пропорции:*

$$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}=\frac{1}{2}\bullet\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}}, \qquad (3)$$

т.е. отношение площадей (масс) малых внутренних треугольников ABE *и* AED *в два раза превышает отношение площадей (масс) внешних больших треугольников* ABF *и* AFC. Геометрический смысл коэффициента $\frac{1}{2}$ в формуле (3) связан с тем, что отрезок BD – медиана.

Рис. 3



Легко убедиться, что в результате (3) содержится результат (1). Существует еще один случай, с результатом которого мы знакомы: если m = 2, а n = 1, то отрезок AF является медианой, которая делит треугольник ABC на два равновеликие треугольники ABF и AFC (см. свойство I, пункт 2)). Действительно, с помощью (2) получим

$$S_{\Delta AFC}=\frac{2mS}{2m+n}=\frac{2\cdot1\cdot S}{2\cdot1+2}=\frac{S}{2} \text{ и } S_{\Delta ABF}=\frac{nS}{2m+n}=\frac{2\cdot S}{2\cdot1+2}=\frac{S}{2}.$$

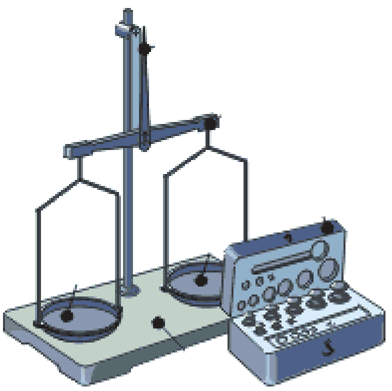
Полученный результат (3) экспериментально легко проверить. Известно, что масса m (вес P = mg, g - ускорение свободного падения) однородного (гомогенного) тела, имеющего постоянную толщину d прямо пропорциональна его площади S.

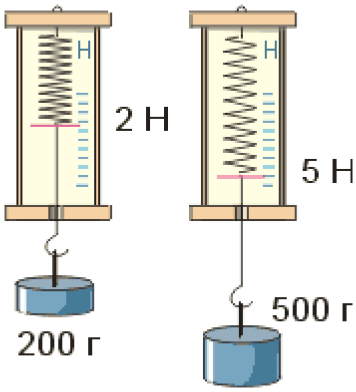
$$m = \rho V = \rho d S$$

В этой формуле ρ – плотность вещества, V - объем тела, причем предполагаются ρ = const и d = const по всему телу. То есть если на чашах рычажных весов поместить кусочки треугольников из рисунка 1, то в определенных случаях можно добиться равновесия, а в других случаях можно просто взвешивать данный фрагмент тела.

3. Экспериментальная часть

В этой, лабораторной, части работы необходимы рычажные или пружинные весы, которые обязательно имеются любом кабинете физики, альбомный лист





бумаги формата А4, ножницы, желателен персональный компьютер с программой Microsoft Word. В случае отсутствия последнего можно обходиться линейкой и карандашом.

Начнем с того, что в программе Microsoft Word создадим файл, откроем панель рисования. Проведем прямую горизонтальную линию (отрезок АС) известной длины. Для этого в диалоговом окне «Формат автофигуры» необходимо установить высоту линии 0 см, а ширину, например 15 см. Далее в инструменте «Автофигуры», в подразделе «Полилинии» достраиваем произвольный треугольник.

Два равнобедренных или прямоугольных треугольника в Основных фигурах являются частными случаями. При необходимости можно просто пользоваться этими треугольниками, если нет желания построить их по трем сторонам.

Далее находим середину D отрезка АС, проводим медиану BD, отмечаем на ней точку Е и окончательно проводим отрезок AF, проходящий через точку Е. Все необходимые величины определяем с помощью диалогового окна. После этого копируем (инструмент «Копировать») полученный рисунок и еще два раза его вставляем (инструмент «Вставить») в документе. Когда на листе имеются равномерно распределенные три треугольника, файл печатаем на бумагу, а ее клеем на картон.

Вооружаясь ножницами, первый и второй рисунки с треугольниками вырезаем на части ABE и AED, а третий рисунок на части ABF и AFC.

После этого очередь подходит к подвешиванию полученных фигур. Опыт можно сопровождать вычислением погрешности, что неизбежно при взвешивании.

Реализуем три задания:

случай первый - *точка Е середина отрезка* BD, *то массы фигур* ABE AED *равны, а при взвешивании масса фигуры* AFC *должна уравновешиваться двойной массой фигуры* ABF;

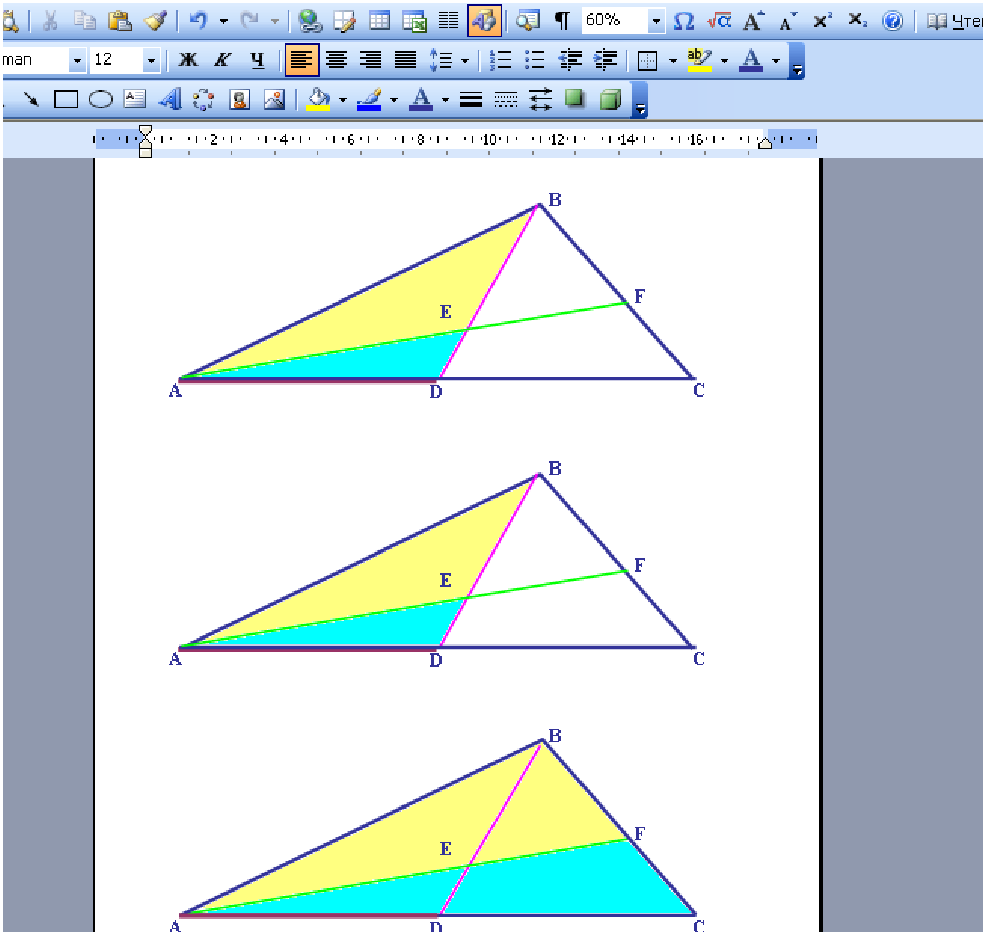


Рис. 4

случай второй - *экспериментальная проверка* ***свойства I*** *(пункты 2) и 3)) медиан треугольника с помощью взвешивания;*

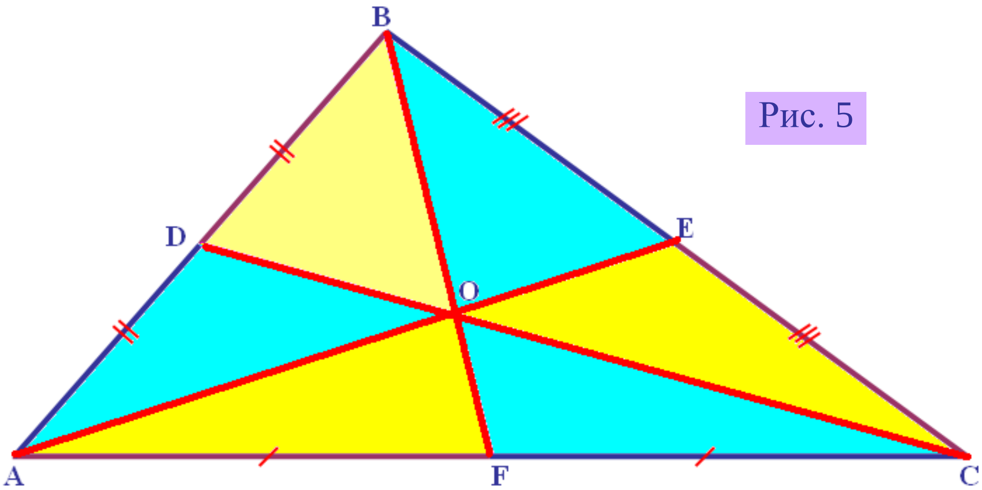


Рис. 5

случай третий – *точка* E *подбирается произвольно на медиане* BD (общий случай).

В итоге предлагается физическая проверка геометрического результата. Для трех органически связанных школьных предметов разрабатывается модель общего рассмотрения. Очевидно, что любую задачу такого рода можно подвергать указанному анализу. Заметим, что рычажные весы хорошо использовать, когда проверяется равновесие тел, тогда как пружинные весы (динамометры) напрямую взвешивают массу (вес) тела, а результаты измерения подвергаются дальнейшей обработке.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЗИВ Б.Г., Задачи к урокам геометрии. 7 – 11 классы. – С.-Петербург, 1998. НПО «Мир и Семья-95».

2. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, Кадомцев и др. Геометрия: Учебник. для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений. – изд. 16. – М.: Просвещение, ОАО «Московские учебники». – 2006.

3. Перышкин А.В., Гутник Е.М. Физика. 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений, 8-е изд., - М.: Дрофа, 2004

4. Мякишев Г Я Буховцев Б Б Сотский Н Н Физика Учебник для 10 классов общеобразовательных учреждений. изд 12-е 14-е. М Издательство «Просвещение». М.: - 2005.

5. В.Л.Экелекян. Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике 2004 № 37 ИНФОРМАТИКА

6. В.Л.Экелекян. Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office 2004 № 45 ИНФОРМАТИКА, 2004 № 46 ИНФОРМАТИКА

7. В.Л.Экелекян. Определение центра масс неправильного тела ***Физика № 48/04***

8. В.Л.Экелекян. Проверка уравнения теплового баланса ***Физика № 29/04***

9. В.Л.Экелекян. Относительность движения ***Физика № 1/06***

10. В.Л.Экелекян. Основы информатики и вычислительной техники – учебно-методические лабораторные разработки-рекомендации для студентов и молодых научных работников-выпускников медицинских институтов Ереван 1988

- *Задача 1.*

Автомобиль трогается с места с ускорением $\mathbf{a_1 = 2}$ **м/с**^{2}. *При скорости* $\mathbf{v =}$ **36 км/ч** *ускорение автомобиля стала равным* $\mathbf{a_2 = 1}$ **м/с**^{2}. *С какой установившейся скоростью* $\mathbf{v_0}$ *будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги автомобиля при движении считать постоянной.*

Дано: $\mathbf{a_1 = 2}$ **м/с**^{2}
$\mathbf{v_2 = 36}$ **км/ч = 10 м/с**
$\mathbf{a_2 = 1}$ **м/с**^{2}
$F_{сопр.} = kv$

Найти: $\mathbf{v_0}$

Решение:

Будем исходить из второго закона Ньютона

$$\mathbf{ma = F_{тг} - F_{сопр} = F_{тг} - kv \quad (1)}$$

Здесь

m – масса автомобиля,

a - ускорение автомобиля, **v** - текущая скорость автомобиля,

$\mathbf{F_{тг}}$ - сила тяги автомобиля, которая согласно условиям задачи постоянная ($\mathbf{F_{тг}}$ = const),

$\mathbf{F_{сопр} = - kv}$ – сила сопротивления, которая согласно условиям задачи, пропорциональна скорости **v** автомобиля, **k** - коэффициент пропорциональности, знак минус “ **-** ” указывает, что скорость и сила направлены в разные стороны.

Обратим внимание на то физическое обстоятельство, что установившейся скорость (стационарное движение с постоянной скоростью $\mathbf{v_0}$) у автомобиля появится тогда, когда сила тяги $\mathbf{F_{тг}}$ уравновесится (компенсируется) с силой сопротивления $\mathbf{F_{сопр}}$, т.е. согласно первому закону Ньютона автомобиль будет двигаться по инерции:

$$\mathbf{F_{тг} = F_{сопр}}$$

или

$$\mathbf{F_{тг} = kv_0} \qquad (2)$$

Через закон (1) учитем условия задачи о том, что когда автомобиль трогается с места (т.е. начальная скорость равняется нулю, следовательно и сила сопративления равняется нулю) ускорение автомобиля равняется $\mathbf{a_1}$ (автомобиль двигается под воздействием только силы тяги):

$$\mathbf{ma_1 = F_{тг}}, \qquad (3)$$

а при скорости $\mathbf{v_2}$ ускорение автомобиля стало раным $\mathbf{a_2}$:

$$\mathbf{ma_2 = F_{тг} - kv_2} . \qquad (4)$$

Рассмотрим (2) – (4) как систему трех уравнений по отношению к четырем неизвестным $\mathbf{F_{тг}}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v_0}$:

$$\begin{cases} \mathbf{F_{тг} = kv_0} \\ \mathbf{ma_1 = F_{тг}} \\ \mathbf{ma_2 = F_{тг} - kv_2} . \end{cases} \qquad (5)$$

Решая систему (5) можно определить установившейся скоростью $\mathbf{v_0}$:

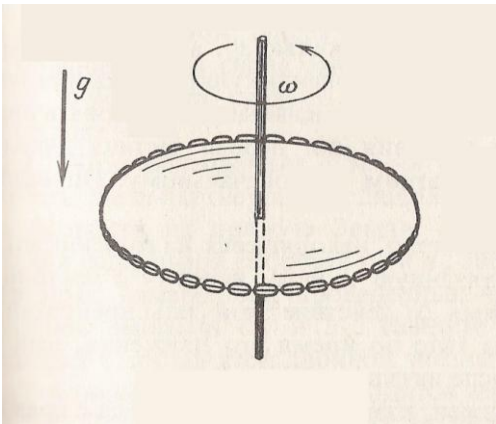
$$v_0 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \cdot v_2 \qquad (6)$$

или

$$v_0 = \frac{2}{2-1} \cdot 10 = 20 \text{ м/с}$$

Ответ: 20 м/с.

- *Задача 2.*



Резиновый шнур длиной 0,8 м и массой 300 г имеет форму круглого кольца. Его положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили вокруг вертикальной оси так, что скорость каждого элемента цепочки равна 3 м/с. Найдите удлинение шнура, если его жесткость 30 Н/м.

Дано: l_0 = 0,8 м
m = 0,3 кг
v = 3 м/с
k = 30 Н/м

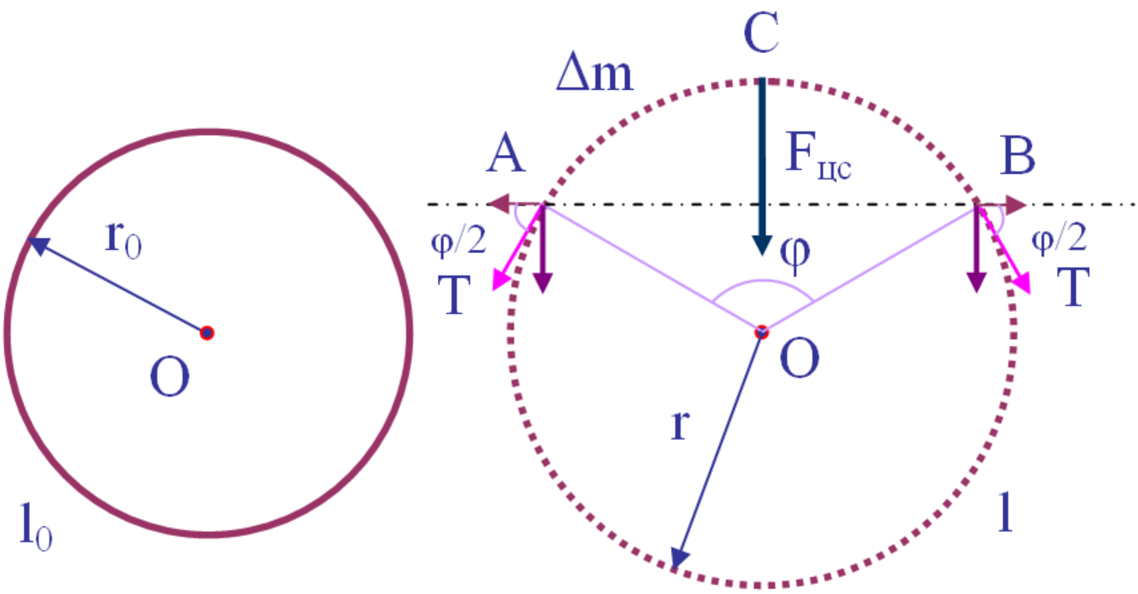
Найти: Δl ?

Решение:

Когда резиновый шнур из-за вращения кольца удлиняется, в нем возникает упругая сила $\mathbf{F_{упрг.}}$, величина которой определяется согласно закону Гука:

$$T = \left|\vec{F}_{упр.}\right| = k\Delta l, \qquad (1)$$

где удлинение шнура **Δl** определяется как разность новой и старой длин:



$$\Delta l = l - l_0 = 2\pi(r - r_0). \qquad (2)$$

Сила упругости **T** в любой точке нового шнура будет направлена по касательной и она по величине постоянная вдоль всего шнура.

В окружности с радиусом **r** вращающегося шнура рассмотрим малый центральный угол **φ**. В точках **A** и **B** по касательным направлениям действуют упругие силы **T**, которые разложим по направлению линии **AB** и по перпендикулярному к ней направлению. Так как треугольник **AOB** равнобедренный, то $\angle AOC = \angle BOC = {}^{\varphi}\!/_{2}$ и $\angle BAO = \angle ABO = {}^{(\pi-\varphi)}\!/_{2}$. Сила **T** с направлением **AB** составляет угол **φ/2** согласно свойству двух углов, составленных из взаимно перпендикулярных сторон. Следовательно, вертикальные к **AB** составляющие упругих сил $\mathbf{T_A}$ и $\mathbf{T_B}$ будут равны

$$T_{\perp} = T\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad (3)$$

а их векторная сумма –

$$|\vec{F}_{упр.,рез.}| = \left|\vec{T}_A + \vec{T}_B\right| = 2T_{\perp} = 2T\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (4)$$

всегда смотрит в центр окружности.

Так как шнур вращается как окружность, то на каждый его элемент действует центробежная (как реакция центростремительной) сила $\mathbf{F_{цб}}$. В качестве элемента шнура рассмотрим дугу **ABC**, которую тянет хорда **AB**, находящаяся перед центральным малым углом **φ**. Массу Δm этого элемента найдем исходя из соображения однородности шнура - равные дуги шнура имеют одинаковую массу:

$$\Delta m = \frac{m}{l}\cdot \Delta l_{\varphi} = \frac{m}{l}\cdot (r\cdot\varphi) = \frac{m}{2\pi r}\cdot (r\cdot\varphi) = \frac{m}{2\pi}\cdot\varphi, \qquad (5)$$

здесь были использованы формулы, выражающие связь между радианной мерой угла, длиной дуги и радиусом окружности, а также формула длины окружности.

Если угол φ мал, то дуга **ABC** также мала и ее можно рассматривать, как материальную точку. С учетом (5) напишем выражение центростремительной силы $\mathbf{F_{цс}}$ для маленького участка шнура массой Δm, движущейся со скоростью **v** по окружности радиуса **r**:

$$F_{цс.} = \frac{\Delta m\cdot v^2}{r} = \frac{m\cdot\varphi\cdot v^2}{2\cdot\pi\cdot r} = \frac{m\cdot\varphi\cdot v^2}{l}. \qquad (6)$$

Теперь воспользуемся основной идеей для решения данной задачи - роль центростремительной силы $F_{цс.}$ играет соответствующая составляющая результирующей упругой силы $F_{упр.,рез.}$:

$$2T\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{m\varphi\cdot v^2}{l} \Rightarrow 2k\Delta l\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{m\varphi\cdot v^2}{l} \Rightarrow k\Delta l\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{m\cdot v^2}{l}. \qquad (7)$$

Из курса математического анализа известно, что при малых углах (естественно, выраженных в радианах) синус тригонометрическая функция приблизительно равен углу и это приближение тем точнее, чем меньше угол:

$$\sin x \approx x \text{ если } |x| << 1. \qquad (8)$$

Имея в виду это обстоятельство третью часть соотношения (7) перепишем как:

$$l\cdot\Delta l = \frac{m\cdot v^2}{k}, \qquad (9)$$

или с учетом (2) напишем квадратное уравнение по отношению удлинению Δl:

$$(\Delta l)^2 + l_0\cdot\Delta l - \frac{m\cdot v^2}{k} = 0, \qquad (10)$$

решениями которого являются:

$$(\Delta l)_{1,2} = \frac{-l_0 \mp\sqrt{l_0{}^2 + \frac{4m\cdot v^2}{k}}}{2}. \qquad (11)$$

Откажемся от отрицательного корня и окончательно остановимся на положительном ответе - напишем ответ задачи:

$$\Delta l = 0{,}5\cdot\left(\sqrt{l_0{}^2 + \frac{4m\cdot v^2}{k}} - l_0\right) \qquad (12)$$

Проверка показывает, что у полученного ответа (12) размерность длины. Анализ полученного ответа показывает, что чем больше масса шнура, тем больше удлинение, чем больше жесткость материала шнура, тем удлинение меньше.

Получим численный ответ:

$$\Delta l = 0{,}5 \cdot \left(\sqrt{0{,}64 + \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 9}{3}} - 0{,}8 \right) = 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}1 \quad (\text{м}).$$

Ответ: 10 см

Л И Т Е Р А Т У Р А

Перышкин А.В., Гутник Е.М. Физика. 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений, 8-е изд., - М.: Дрофа, 2004

Мякишев Г Я Буховцев Б Б Сотский Н Н Физика Учебник для 10 классов общеобразовательных учреждений. изд 12-е 14-е. М Издательство «Просвещение». М.: - 2005.

Павленко Ю.Г. Начала физики. М., Изд-во Моск. ун-та, 1988.

В.Л.Экелекян. Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике 2004 № 37 ИНФОРМАТИКА

В.Л.Экелекян. Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office 2004 № 45 ИНФОРМАТИКА, 2004 № 46 ИНФОРМАТИКА

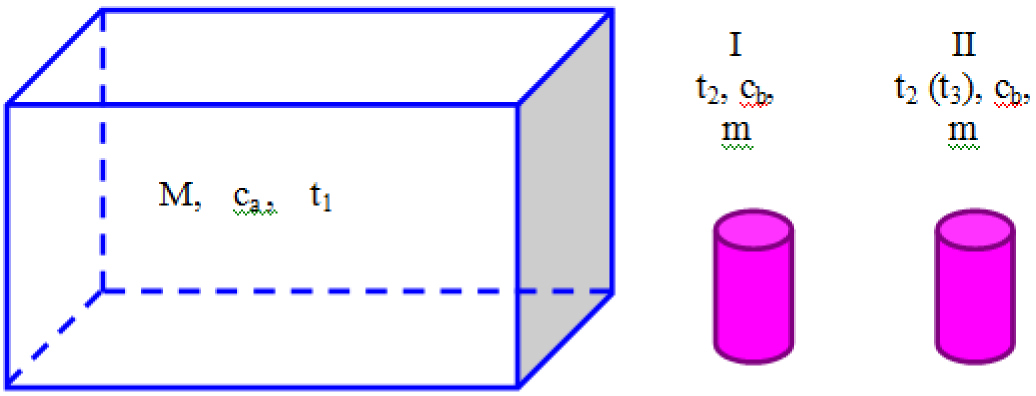
В.Л.Экелекян. Основы информатики и вычислительной техники – учебно-методические лабораторные разработки-рекомендации для студентов и молодых научных работников-выпускников медицинских институтов Ереван 1988

- ***Лабораторная работа 1.***

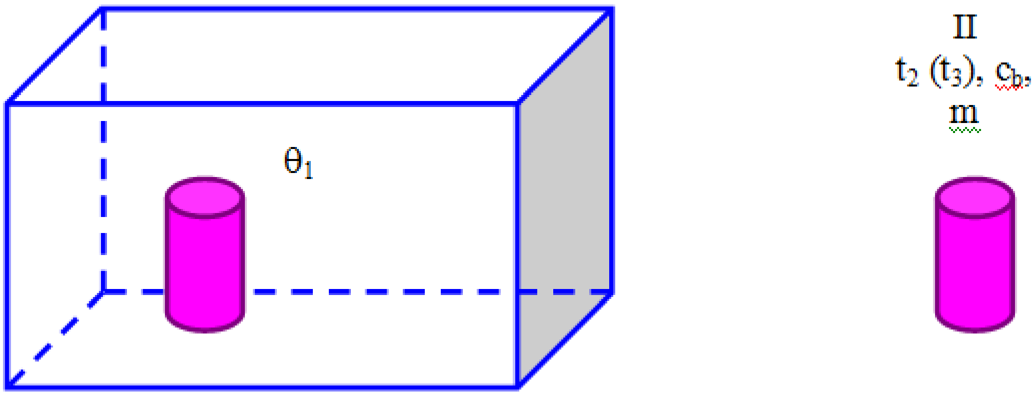
Основанием настоящей лабораторной работы является задача № 564 из «Сборник задач по физике» (для 9 – 11 классов средней школы М., «Просвещение» 1988).

564*. После опускания в воду, имеющую температуру 10^0C, тела, нагретого до 100^0C, через некоторое время установилась общая температура 40^0C. Какой станет температура воды, если, не вынимая первого тела, в нее опустить еще одно такое же тело, нагретое до 100^0C?

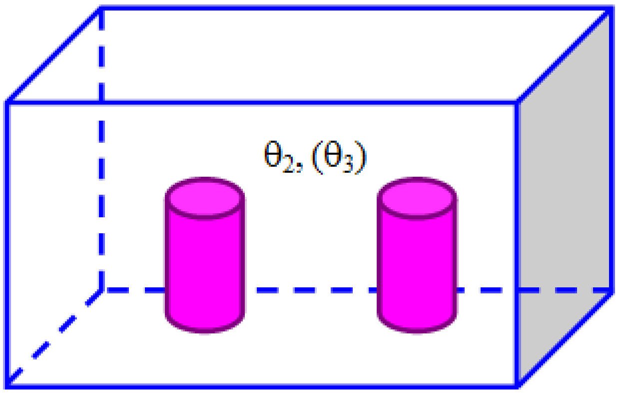
Начальная позиция (Рис. 1.)



Картина после опускания в воду первого тела (Рис. 2.)



Картина после опускания в воду второго тела (Рис. 3.)



<u>Дано:</u>

$t_1 = 10^0C$
$t_2 = 100^0C$
$\theta_1 = 40^0C$

<u>Найти:</u>

θ_2 - ?

<u>Решение:</u>

Введем обозначения:
M - масса воды,
m - масса тела (гири),
c_a- удельная теплоемкость воды,
c_b - удельная теплоемкость тела (гири).

Решение задачи разобьем на два этапа:

1) первое тело погружается в воду, оно тепло $Q_{b,I}$ отдает, а вода это тепло получает $Q_{a,I}$ $\Rightarrow$ $Q_{b,I} = mc_b(t_2 - \theta_1)$; $Q_{a,I} = Mc_a(\theta_1 - t_1)$, причем $Q_{b,I} = Q_{a,I}$ (уравнение теплового баланса).
2) второе тело погружается в воду, где кроме воды находится первое тело.

Следовательно, второе тело тепло $Q_{b,II}$ отдает, а вода и первая гиря это тепло

$\begin{cases} Q_{a,II,b,I} = Q_{a,II} + Q_{b,I,II} \\ Q_{b,I,II} = mc_b(\theta_2 - \theta_1), \end{cases}$ будут поглощать $\Rightarrow$ $Q_{b,II} = mc_b(t_2 - \theta_2); Q_{a,II} = Mc_a(\theta_2 - \theta_1)$ и причем $Q_{b,II} = Q_{a,II,b,I}$ (уравнение теплового баланса, примененная второй раз).

Напишем систему уравнений:

$$\begin{cases} mc_b(t_2 - \theta_1) = Mc_a(\theta_1 - t_1), \\ mc_b(t_2 - \theta_2) = Mc_a(\theta_2 - \theta_1) + mc_b(\theta_2 - \theta_1). \end{cases} \quad (1)$$

По отношению пяти неизвестным величинам (m, c_b, M, c_a и θ_2) имеется система двух линейных по отношению к температуре уравнений. Однако это обстоятельство не должно пугать, так как по отношению к первым четырем переменным эта система однородна. Поэтому решим эти два уравнения по отношению конфигурации mc_b / Mc_a :

$$\frac{mc_b}{Mc_a} = \frac{\theta_1 - t_1}{t_2 - \theta_1},$$

$$\frac{mc_b}{Mc_a} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 + \theta_1 - 2\theta_2} \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\frac{\theta_1 - t_1}{t_2 - \theta_1} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 + \theta_1 - 2\theta_2}$$

Последнее уравнение линейное по отношению к единственной неизвестной величине θ_2. Решая его, получим температуру воды, если, не вынимая первого тела, в нее опустить еще одно такое же тело:

$$\theta_2 = \frac{t_1(t_2 + \theta_1) - 2t_2\theta_1}{2t_1 - t_2 - \theta_1}. \qquad (3)$$

Производя численный расчет, получим:

$$\theta_2 = \frac{10(100+40) - 2\cdot 100\cdot 40}{2\cdot 10 - 100 - 40} = \frac{140-800}{2-14} = \frac{660}{12} = \frac{110}{2} = 55^0 C.$$

Итак, окончательная температура будет 55^0C.

Перед тем, как изложить суть лабораторной работы, предыдущую задачу решим для более реалистического случая, когда при переложении второго тела, его исходная температура равна t_3 и отлична от первоначальной температуры первого тела t_2. Если обозначить искомую температуру θ_3, то исходное уравнение (1) слегка изменится - все величины с нижним индексом “2” заменятся на соответствующие величины с нижним индексом “3” (см. также Рис. 1., 2. и 3.):

$$\begin{cases} mc_b(t_2 - \theta_1) = Mc_a(\theta_1 - t_1), \\ mc_b(t_3 - \theta_3) = Mc_a(\theta_3 - \theta_1) + mc_b(\theta_2 - \theta_1), \\ \dfrac{\theta_1 - t_1}{t_2 - \theta_1} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_3 - 2\theta_3 + \theta_1}. \end{cases} \qquad (4)$$

Именно такое изменение имеет место, когда решаем эту систему уравнений. Результат выглядит так:

$$\theta_3 = \frac{\theta_1(t_2 + t_3) - t_1(\theta_1 + t_3)}{2t_1 + t_2 + \theta_1}. \qquad (5)$$

Сейчас можно приступить к выполнению самой лабораторной работе.

<u>Оборудование:</u> набор одинаковых металлических гирь с приспособлением переставлять (можно просто привязать ниточку), сосуд с водой, канистр с водой и возможностью нагрева (можно бытовым кипятильником), термометры.

<u>Ход эксперимента:</u> в кастрюле готовым кипяток, две одинаковые гири помещаем в кастрюлю, готовым второй сосуд с водой. Измеряем температуру в сосуде, результат t_1 заносим в таблицу, измеряем температуру воды в кастрюле и результат t_2 заносим в таблицу, быстро переносим один из гирь в сосуд и через 30 секунд измеряем установившую температуру, результат θ_1 заносим в таблицу. Еще раз измеряем температуру воды в кастрюле и результат t_3 заносим в таблицу. Последний раз переносим уже вторую гирю в сосуд и примерно через 30 с измеряем установившуюся температуру а результат θ_3 заносим в таблицу. На базе чисел t_1, t_2, θ_1 и t_3 по формуле (5) вычисляем теоретически ожидаемое значение $\theta_{3теор.}$.

Опыт повторяется три раза. Результаты заносятся в Таблицу. Таблица

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Экспериментальное значение в ^0C</td><td colspan="3">Теоретическое значение в ^0C</td><td colspan="3" rowspan="3">Относительная погрешность в процентах</td></tr>
<tr><td></td><td>I опыт</td><td>II опыт</td><td>III опыт</td><td rowspan="6">Резуль-тат I–го из-мере-ния (I опыт)</td><td rowspan="6">Резуль-тат II–го из-мере-ния (II опыт)</td><td rowspan="6">Резуль-тат III–го из-мере-ния (III опыт)</td></tr>
<tr><td>t_1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>t_2</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">I опыт</td><td rowspan="4">II опыт</td><td rowspan="4">III опыт</td></tr>
<tr><td>t_3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>θ_1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>θ_2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>θ_3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{|\theta_{3\exp} - \theta_{3theor}|}{\theta_{3\exp}} \cdot 100\% \qquad (6)$$

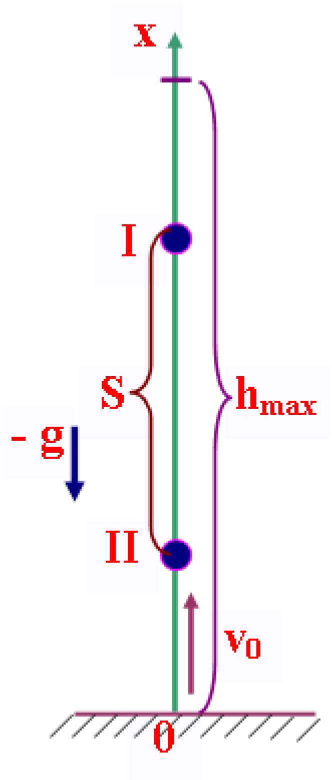
Вычисления теоретического значения температуры и относительной погрешности производится в программе Microsoft Excel, куда достаточно ввести числа t_1, t_2, θ_1 и t_3 и она (программа) сама вычислить $\theta_{3теор.}$ и на основе формулы (6) относительную погрешность. Для этого достаточно копировать данные из Таблицы в Microsoft Excel (см. соответствующий файл) и наоборот вычисленные программой Microsoft Excel данные копировать в Таблицу.

- ***Задача 3.***

Давайте пожонглируем немножко

Жонглер бросает вертикально вверх шарики с одинаковой скоростью через равные промежутки времени. При этом пятый шарик жонглер бросает в тот момент, когда первый шарик возвращается в точку бросания. Найти максимальное расстояние S между первым и вторым шариками, если

начальная скорость шариков v_0 = 5 м/с. Ускорение свободного падения принять равным g = 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Задачу решим исходя из законов кинематики равноускоренного прямолинейного движения, а более точно применяя уравнения движения для свободного падения. Для этого выберем начало отсчета точку бросания первого шарика, ось x отправим вертикально вверх, а время t будем считать с начала первого броска. Общие уравнения для проекции перемещения x и для проекции скорости v_x на ось x будут иметь вид:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2;$$
$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t,$$

где x_0 - проекция начального перемещения,

которая в нашей задаче равняется нулю, v_{0x} проекция начальной скорости, которую для краткости обозначим буквой v_0. Тогда учитывая значение ускорения свободного падения $a_x = -g$, получим уравнения:

$$x = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2; \qquad (1)$$
$$v_x = v_0 - g \cdot t. \qquad (2)$$

Промежуток времени, через который бросаются шарики, обозначим через греческую букву τ. Тогда из условия задачи о том, что пятый шарик жонглер бросает в тот момент, когда первый шарик возвращается в точку бросания следует, что первый шарик в полете будет за время 4τ, причем первое время 2τ первый шарик поднимается до своей верней точки $H_{\max} = h$, а за время 2τ. С другой стороны, величину h определим по известной формуле $v^2 - v_0^2 = 2al$, связывающей начальную, конечную скорости v_0, v равноускоренного движения с ускорением a и пройденным путем l. В нашем случае $v = 0$ (в верхней точке шарик останавливается, чтобы после свободно падать), $a = -g$ (подъем шарика есть
равнозамедленное движение) и $l = h$. Итак

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (3)$$

Так как подъем первого шарика длится время τ, а в верхней точке подъема шарик останавливается, по формуле (2) получим $v_0 = g \cdot 2\tau$ или

$$\tau = \frac{v_0}{2g}. \qquad (4)$$

Сейчас вычислим координаты первого и второго шариков через времени t после броска первого шарика

$$x_1 = v_0 t - {gt^2}/{2}; \qquad (5)$$

$$x_2 = v_0(t-\tau) - {g(t-\tau)^2}/{2}, \text{ причем } t \ge \tau. \qquad (6)$$

Тогда расстояние s между первым и вторым шариками будет вычисляться формулой

$$s = |x_1 - x_2| = \left| v_0 t - {gt^2}/{2} - v_0(t-\tau) + {g(t-\tau)^2}/{2} \right| = \left| v_0\tau - {g\tau(2t-\tau)}/{2} \right|.$$

Знак модули учитывает тот факт, что во время движения наблюдается как подъем, так падение шариков.

Учитывая (3) и (4), получим зависимость расстояния s от времени t:

$$s = s(t) = \left| \frac{5v_0^2}{8g} - \frac{v_0 t}{2} \right|, \qquad (7)$$

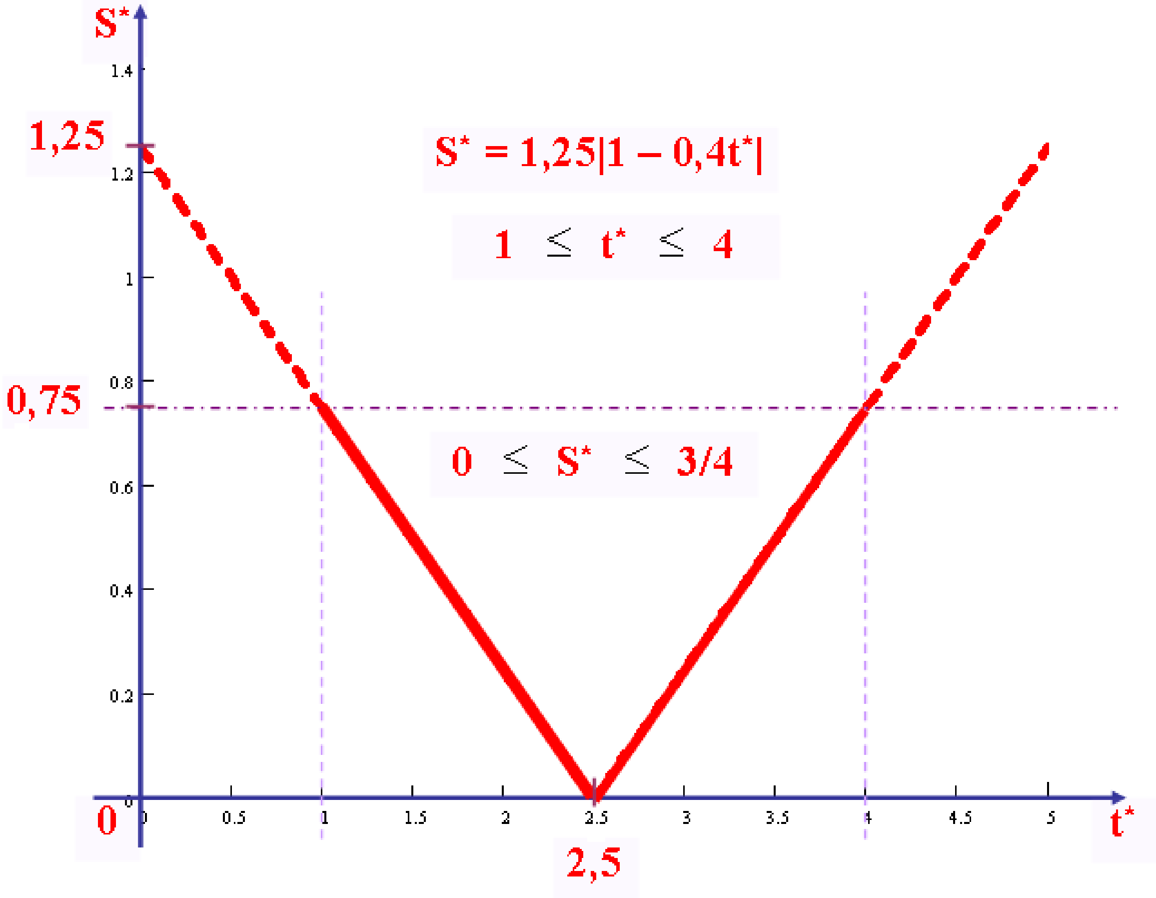
или введя безразмерную величину времени $t^* = {t}/{\tau}$, безразмерное расстояние $s^* = {s}/{h}$ и пользуясь выражением (3) придем к зависимости:

$$s(t^*) = \frac{5h}{4}\left|1 - 0{,}4t^*\right| \text{ или } s^*(t^*) = 1{,}25\left|1 - 0{,}4t^*\right|. \qquad (8)$$

Практически решение поставленной физической задачи мы свели к решению математического линейного уравнения, содержащего модуль. Аналитическое и графическое решение этого уравнения показывает, что максимальное значение функция s^* принимает при двух значениях аргумента t^*: когда $t^* = 1$ или $t^* = 4$ и это значение равняется $s^* = {3}/{4}$. Переходя к размерным величинам, можем утверждать, что максимальное расстояние между первым и вторым шариками достигается дважды: первый раз при броске второго шарика и второй раз, когда бросается пятый шарик, или, что то же самое, когда первый шарик окончательно падает вниз. Это
расстояние равняется

$$s_{\max} = h \cdot s^*(t^* = 1) = h \cdot 1{,}25\left|1 - 0{,}4\right| = 0{,}75 \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

Итак, подытожим: первый и второй шарики осуществляют равнопеременное движение с ускорением свободного падения. Проекция перемещения при таком движении есть квадратная функция от времени, а расстояние между ними есть модуль разности. При вычислении этой разности квадратичная зависимость от



времени исчезает и остается зависимость линейная, где переменная t (время) находится под знаком модуля. И если просто линейная зависимость не предполагает наличие экстремума функции, такая зависимость с учетом модуля приводит к возникновению максимального расстояния, причем дважды – в начале и в конце движения первого шарика.

Ответ: $s_{\max} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{v_0^2}{g}$

Сейчас решим ту же задачу, на этот раз на основе одной теоремы, которая приводится в учебнике физики 9-го класса общеобразовательной школы:

пути, пройденные за любые равные промежутки времени при равноускоренном прямолинейном движении без начальной скорости относятся как первые нечетные натуральные числа –

$$S_1 : S_2 : S_3 : \dots : S_n : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n-1) : \dots \qquad (9)$$

Докажем эту теорему. Предположим, что равноускоренное движение с ускорением a, с нулевой начальной скоростью $v_0 = 0$ и что промежуток времени, за которое рассматривается движение, равняется τ. Сделаем также обозначения:

пути, пройденные за равные промежутки τ обозначим буквой S_i, так что S_1 - это путь, пройденный за первый промежуток времени τ, S_2 - за второй, а S_n - путь, пройденный за n-й промежуток времени τ. Пути же, пройденные за времена $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau$, $t_3 = 3\tau$ и т.д. $t_{n-1} = (n-1)\tau$ и $t_n = n\tau$ обозначим буквами l_1, l_2, l_3 и т.д., l_{n-1} и l_n. Эти движения все стартуют с нулевой начальной скоростью.

Сначала вычислим пути l_i ($i = 1,2.3,\dots,(n-1),n,\dots$)

$$l_1 = \frac{a}{2}\cdot\tau^2,\ l_2 = \frac{a}{2}\cdot(2\tau)^2,\ l_3 = \frac{a}{2}\cdot(3\tau)^2,$$

$$l_{n-1} = \frac{a}{2}\cdot((n-1))\tau^2,\ l_n = \frac{a}{2}\cdot(n\tau)^2,\dots,$$

а пути S_i найдем как разность $S_i = l_i - l_{i-1}$ ($i = 1,2.3,\dots,(n-1),n,\dots$):

$$S_1 = l_1 = \frac{a}{2}\cdot\tau^2,\ S_2 = l_2 - l_1 = \frac{a}{2}\cdot(4\tau^2 - \tau^2) = 3\cdot\frac{a}{2}\tau^2,$$

$$S_3 = l_3 - l_2 = \frac{a}{2}\cdot(9\tau^2 - 4\tau^2) = 5\cdot\frac{a}{2}\tau^2,\dots,\ S_n = l_n - l_{n-1} =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot(n^2\tau^2 - (n-1)^2\tau^2) = \frac{a}{2}(n-n+1)\cdot(n+n-1)\tau^2 = (2n-1)\cdot\frac{a}{2}\tau^2,$$ то есть

$$S_1 : S_2 : S_3 : \dots : S_n : \dots = 1\cdot\frac{a}{2}\tau^2 : 3\cdot\frac{a}{2}\cdot\tau^2 : 5\cdot\frac{a}{2}\cdot\tau^2 : \dots$$

$$\dots : (2n-1)\cdot\frac{a}{2}\tau^2 : \dots = 1:3:5:\dots:(2n-1):\dots.$$

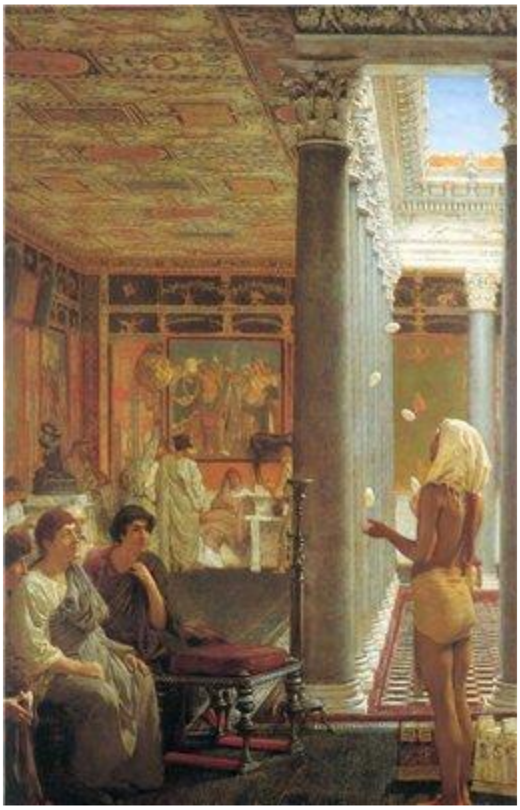
По поводу доказанной теоремы сделаем три замечания:

1) выбор протяженности времени τ не играет роли;
2) значение ускорения a не играет роли;
3) нулевое значение начальной скорости $v_0 = 0$ важное обстоятельство для изящной формы утверждения (9).

Применим доказанную теорему для устного решения поставленной задачи. Рассмотрим движение первого шарика во время его подъема. Он двигается за время

2τ и поднимается на высоту $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$. Это расстояние в силу доказанной теоремы следует делить на четыре равные части, три из которых шарик поднимается за первый промежуток времени τ (чтобы теорема сработала полностью – условие $v_0 = 0$, мы на движение смотрим с конца к началу). Но когда кончается первое время τ и начинается работа второго времени τ, к движению первого шарика присоединяется второй, который к началу броска находится от первого шарика на расстоянии $s = \dfrac{3}{4} \cdot h = \dfrac{3v_0^2}{8g}$. В дальнейшем это расстояние может лишь уменьшаться, так как шарики начинают двигаться навстречу друг друга. Следовательно, указанное расстояние и есть максимальное.

И, наконец, когда через время 2τ после броска второго шарика он окажется на максимальном уровне подъема и начнет падение без начальной скорости, тогда как в это время первому шарику останется спускаться на последнюю одну четвертую часть максимальной высоты (он уже двигался за время 3τ). В этот момент расстояние между первым и вторым шариками опять будет максимальным $s = \dfrac{3v_0^2}{8g}$, так как в течение последнего промежутка времени для первого шарика это расстояние может только уменьшаться.



Решенная задача является хорошей иллюстрацией и демонстрацией квантования пространства в классической механике: при нечетном числе шариков устанавливается устойчивое распределение координат и скоростей шариков (в так называемом фазовом пространстве[2]).

Наконец обратим внимание на сам аттракцион жонглирования. Теоретическое рассмотрение, приведенное выше, показывает, что имеет прямой смысл жонглировать нечетным количеством шариков (или любых других объектов) следует регулировать начальную скорость броска так, чтобы половина минус один шариков спускалась с вышей точки, другая половина минус один шарик поднималась, а средний шарик находился в верхней точке. Тех, кто желает совершенствоваться в жонглерском искусстве, мы отсылаем на сайты в Интернете и хотим напоминать, что это искусство было знакомо еще в древнем Египте:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Экелекян В.Л.* **О методике решения задач на тему «Теория относительности Галилея»** // Архимед, 2010. Вып. 6. стр. 93 – 102.
2. *Экелекян В.Л.* **Задача о раскручивании резинового шнура.** // Архимед, 2008. Вып. 4. стр. 152 – 155.
3. *Экелекян В.Л., Экелекян Л.В.* **Исследование одной головоломки.** // Архимед, 2011. Вып. 7. стр. 110 – 114
4. *Экелекян В.Л., Экелекян Л.В* **Давайте пожонглируем немножко!** // Архимед, 2009. Вып. 5. стр. 129 – 135.
5. *Экелекян В.Л., Экелекян Л.В.* **Методика решения задач по информатике с помощью элементов логики и комбинаторики.** // Архимед, 2008. Вып. 4. стр. 170 – 172.
6. *Экелекян В.Л.* **От геометрии к экспериментальной работе по физике и обратно** // Архимед, 2012. Вып. 8. стр. 106 – 115.
7. *Экелекян В.Л.* **Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике.** // Информатика «Первое сентября», 2004. № 37. стр. 22-24, 31
8. *Экелекян В.Л.* **Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office** 2004. // Информатика «Первое сентября», 2004. № 45. стр. 14-15, 18
9. *Экелекян В.Л.* **Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office** № 46 // Информатика «Первое сентября», 2004. № 46. стр. 13-15
10. *Экелекян В.Л.* **Определение центра масс неправильного тела.** // Физика «Первое сентября», 2004. № 48/04. стр. 19-20
11. *Экелекян В.Л.* **Проверка уравнения теплового баланса.** // Физика «Первое сентября», 2004. № 29/04. стр. 21-22
12. *Экелекян В.Л.* **Относительность движения.** // Физика «Первое сентября», 2006. № 1/06. стр. 14-16
13. *Экелекян В.Л.* **Основы информатики и вычислительной техники.** Учебно-методические лабораторные разработки-рекомендации для студентов и молодых научных работников-выпускников медицинских институтов. - Ереван, 1988.
14. *Экелекян В.Л.* **Логика решения экзаменационных заданий типа В ЕГЭ – Математика.** –М.: Департамент образования г. Москвы, ЮЗОУ, ОМЦ Единый государственный экзамен по математике: вчера, сегодня, завтра, 2009. стр. 104 – 109,
15. *Экелекян В.Л., Экелекян Л.В.* **Методика преподавания элементов теории вероятностей, комбинаторики, элементов логики в 7 – 9 классах общеобразовательной школы на примерах решения практических задач.** // Теория и методика. Том 1. / Исследовательский подход в образовании: от теории

к практике. Научно-методический сборник в двух томах. - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь», 2009. стр. 379 – 385.

16. *Экелекян В.Л.* **Задача «счастливого билетика» в ракурсе комбинаторики, информатики, теории вероятностей и математической статистики** // Теория и методика. Том 1. / Исследовательский подход в образовании: от теории к практике. Научно-методический сборник в двух томах. - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь», 2009. стр. 386 – 398.
17. *Экелекян В.Л., Экелекян Л.В.* **Как сделать уроки физики и математики в 5 – 7 классах более интересными и увлекательными** // Теория и методика. Том 1. / Исследователь-ский подход в образовании: от теории к практике. Научно-методический сборник в двух томах. - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь», 2010. стр. 451 – 460
18. *Экелекян В.Л., Экелекян Л.В.* **Методика преподавания некоторых основ логики в школьном курсе «Информатика» с точки зрения классической китайской арифметики** // Теория и методика. Том 1. / Исследовательский подход в образовании: от теории к практике. Научно-методический сборник в двух томах. - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь», 2010. стр. 461 – 468
19. *Экелекян В.Л.* **О методике решения пяти задач на тему «Относительность движения» в школьном курсе физики** // Теория и методика. Том 1. / Исследовательский подход в образовании: от теории к практике. Научно-методический сборник в двух томах. - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь», 2010. стр. 469 – 478
20. *Экелекян В.Л.* **Обобщение, математизация и компьютеризация одной кинематической задачи с целью создания проекта по экспериментальной физике.** / **Исследовательский подход в образовании: проблема подготовки педагога.** Научно-методический сборник в двух томах./ Теория и методика в образовании: / - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь» МПГУ, 2012. Том 1.стр. 904 – 915
21. *Экелекян В.Л.* **Методика интегрированного подхода в задачах физики или как задачу геометрии превратить в экспериментальную работу по физике в группах дополнительного образования различных возрастных категорий.** / **Исследовательский подход в образовании: проблема подготовки педагога.** Научно-методический сборник в двух томах./ Теория и методика в образовании: / - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь» МПГУ, 2012. Том 1.стр. 916 – 933
22. *Экелекян В.Л.* **Трансцендентные числа π и е – основные математические постоянные природы (определения, свойства, соотношения, история и мифы)** / **Исследовательский подход в образовании: проблема подготовки педагога.** Научно-методический сборник в двух томах./ Теория и методика в образовании: / - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь» МПГУ, 2012. Том 1.стр. 934 – 946