Теорема

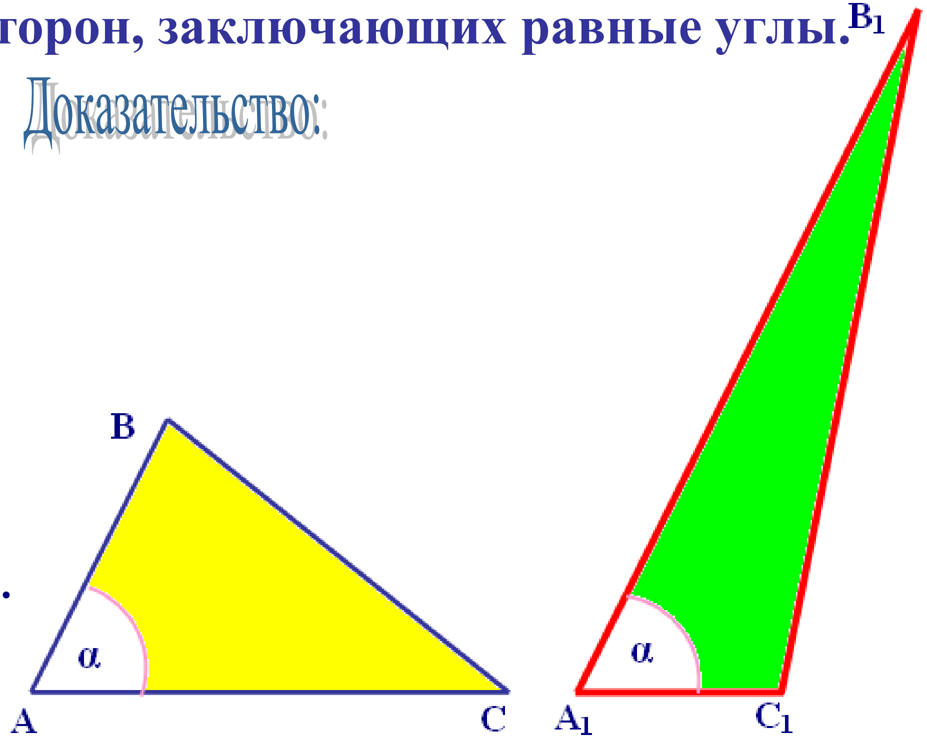
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ треугольники,

$$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \alpha.$$

Доказать: $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Доказательство:



Доказательство проведем в четыре этапа.

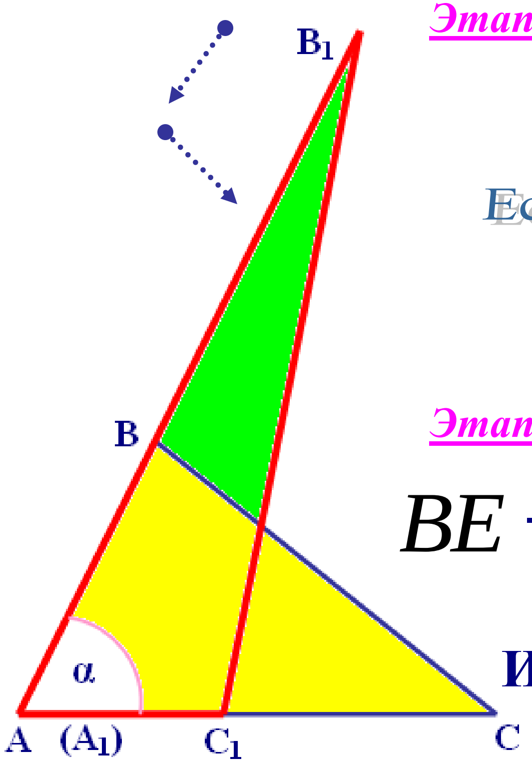
Этап первый **– применение дополнительного построения.**

Дополнительное построение:

Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC.

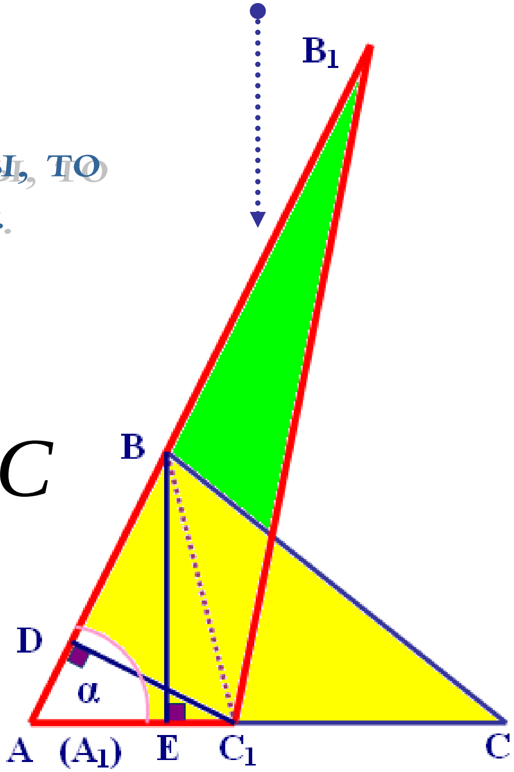
Этап второй **- соединим точку B с точкой C_1 и получим треугольник ABC_1. В этом треугольнике из вершин B и C_1 опустим высоты BE и C_1D.**

$$BE \perp AC_1 \qquad C_1D \perp A_1B$$



Этап третий - воспользуемся известной леммой (дополнительная теорема)

ЛЕММА:
Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.



Этап четвертый – применим лемму:

BE - общая высота треугольников ΔABC и $\Delta ABC_1 \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC_1}} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$. (1)

C_1D - общая высота треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta ABC_1 \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC_1}} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$. (2)

Теперь достаточно разделить уравнение (1) на уравнение (2) и теорема доказана:

$$\frac{S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta ABC_1}}{S_{\Delta ABC_1} \cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}.$$