На урок геометрии с рычажными весами

Экелекян Варужан Левонович
канд. физ.-мат. наук, доцент физ.-фака МГУ им. М.В.Ломоносова, преподаватель математики, физики, астрономии и информатики школы № 11, г. Москвы

Уже пятнадцать лет, как в школе № 11 Гагаринского района ЮЗАО успешно работает схема интегрированного преподавания школьных предметов естественно-научного цикла: физики, математики, химии, биологии, информатики и др. Ученики 8 – 11 классов нашей школы восприняли результаты данного педагогического эксперимента восторженно, по крайней мере, по трем причинам:

1) в учебном процессе видна органическая связь между предметами,
2) ученик почувствовал и полюбил эффект разнообразия,
3) развивается новое качество - целенаправленно работать и ориентироваться в созданных условиях.

Благодаря публикациям [4 – 8, 9] преподавателей школы № 11 в журнале «Первое сентября», накопленный опыт передается и обобщается в школах Российской Федерации.

Во время проведения таких интегрированных уроков, решая, например, задачу по математике, учащиеся обязательно следят за тем, чтобы эта задача имела свой образ в какой-нибудь дисциплине, чаще всего это, естественно, физика, а далее при малейшей возможности строится алгоритм проведения расчетов на уроке информатики.

Ниже приводится результат такого эксперимента при сочетании геометрии, физики и информатики. Работа состоит из трех частей. В первой части решается геометрическая задача, заимствованная из [1] по курсу геометрии 8 – 9 классов общеобразовательной школы. Во второй части делаются обобщения по этой задаче и осуществляется адаптация к проведению интегрированного урока. Получаем результат, который представляет интерес в курсе физики 9 – 10 классов. Третья часть - лабораторная работа, которая выполняется на уроке информатики. Результаты геометрических расчетов проверяются экспериментально.

1. Немножко геометрии

Задача: На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, построена точка E так, что $DE = \frac{1}{4}BD$*. Через точку E проведена прямая AE, пересекающая сторону BC в точке F. Найти площадь треугольника AFC.*

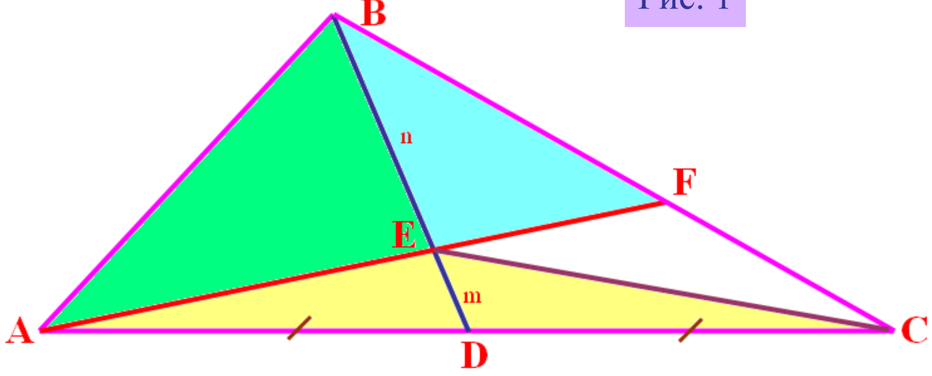


Рис. 1

Дано: ΔABC;
$S_{\Delta ABC} = S$;
$AD = DC$;
$DE = \frac{1}{4} BD$;
$F \in BC$.

Найти: $S_{\Delta AFC}$?

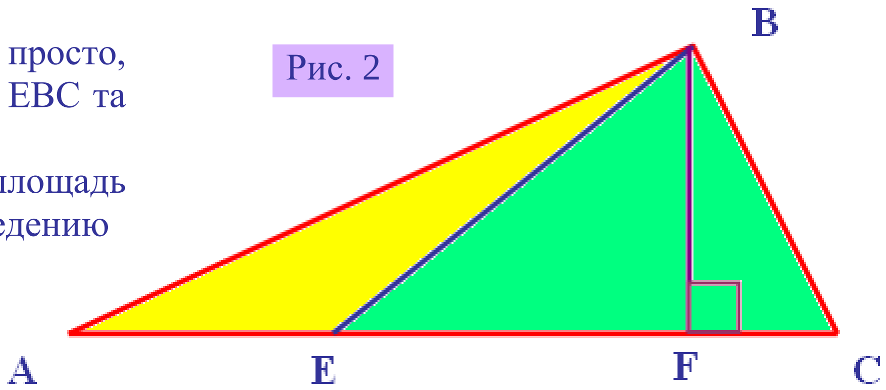
Решение:

Для решения этой задачи вспомним, что медиана треугольника - это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника. У медиан треугольника следующие свойства I:
1) медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины;
2) медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади;
3) весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Второй и третий пункты свойства I медианы являются частными случаями более общей теоремы:
Теорема I: *если точка E делит сторону треугольника ABD на отрезки BE и ED, то площади треугольников ABE и AED относятся как эти отрезки:* $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}} = \frac{BE}{ED}$

Доказывается эта теорема просто, так как у треугольников ABE и EBC та же самая
высота BF ($BF \perp AC$), а площадь треугольника равна полупроизведению основания на высоту
$S_{\Delta ABE} = \frac{AE \cdot BF}{2}$, $S_{\Delta EBC} = \frac{EC \cdot BF}{2}$.

Рис. 2



В силу этой теоремы получим следующие соотношения:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{AD}{DC} = 1 \Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC} = S/2;$$

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}} = \frac{BE}{ED} = 3/1 \Rightarrow S_{\Delta ABE} = 3S/8; S_{\Delta AED} = S/8;$$

$$\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta DEC}} = \frac{AD}{DC} = 1 \Rightarrow S_{\Delta AED} = S_{\Delta DEC} = S/8.$$

Искомую площадь треугольника AFC обозначим через x: $S_{\Delta AFC} = x$ и применим вышеупомянутую теорему для пар треугольников BAF, FAC и BEF, FEC:

$$\frac{S_{\Delta BAF}}{S_{\Delta FAC}}=\frac{BF}{FC},\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta FEC}}=\frac{BF}{FC}\Rightarrow\frac{S_{\Delta BAF}}{S_{\Delta FAC}}=\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta FEC}}\Rightarrow\frac{S-x}{x}=\frac{S-x-{}^{3S}\!/_{8}}{x-{}^{S}\!/_{4}}.$$

Решая это уравнение, окончательно получим:

$$(8x-2S)(S-x)=x(5S-8x)\Rightarrow 8x-2S+2x=5x\Rightarrow$$
$$5x=2S\Rightarrow$$
$$x=\frac{2S}{5}.\quad (1)$$

Итак, нам удалось решить задачу на основе неоднократного применения теоремы I и решения линейного алгебраического уравнения.

Ответ: $S_{\Delta AFC}=2\cdot{}^{S}\!/_{5}$.

2. Обобщенный случай

Теперь решим поставленную выше задачу в более общем случае, когда точка E делит медиану BD в отношении

$$BE=\frac{n}{m}ED.$$

Как в предыдущем случае, требуется найти площадь треугольника AFC, если известна площадь треугольника $S_{\Delta ABC}=S$.

Понятно, что в задаче, рассмотренной в первой части работы, параметры m и n выбраны как:

n = 3, m = 1.

Применим теорему I

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}}=\frac{BE}{ED}={}^{n}\!/_{m}\Rightarrow S_{\Delta ABE}=\frac{n}{2(n+m)}S;S_{\Delta AED}=\frac{m}{2(n+m)}S;$$
$$\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta DEC}}=\frac{AD}{DC}=1\Rightarrow S_{\Delta AED}=S_{\Delta DEC}=\frac{m}{2(m+n)}S.$$

Далее, аналогично предыдущему случаю, получим уравнение:

$$\frac{S_{\Delta BAF}}{S_{\Delta FAC}}=\frac{S_{\Delta BEF}}{S_{\Delta FEC}}\Rightarrow\frac{S-x}{x}=\frac{S-x-\dfrac{n}{2(m+n)}S}{x-2\dfrac{m}{2(m+n)}S}=\frac{2S(m+n)-2x(m+n)-nS}{2x(m+n)-2mS}\Rightarrow$$
$$(S-x)(2xm+2xn-2mS)=(2mS+nS-2xm-2xn)x,$$

решая которое найдем:

$$xn-2mS+2mx=0\Rightarrow$$
$$x=\frac{2mS}{n+2m}\qquad (2)$$

т.е.

$$S_{\Delta AFC}=x=\frac{2mS}{2m+n}\ \text{и}\ S_{\Delta ABF}=S-x=\frac{nS}{2m+n},$$

а также

$$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}=\frac{n}{2m}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BE}{ED}.$$

Итак, получили следующий результат, который заслуживает отдельной словесной формулировки:
если точка E *на медиане* BD *треугольника* ABC *делит ее в пропорции* $m:n$, *то отрезок* AF (AE) *делит площади треугольников* ABC *и* ABD *в пропорции:*

$$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}=\frac{1}{2}\bullet\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta AED}}, \qquad (3)$$

т.е. отношение площадей (масс) малых внутренних треугольников ABE *и* AED *в два раза превышает отношение площадей (масс) внешних больших треугольников* ABF *и* AFC. Геометрический смысл коэффициента $\frac{1}{2}$ в формуле (3) связан с тем, что отрезок BD – медиана.

Легко убедиться, что в результате (3) содержится результат (1). Существует еще один случай, с результатом которого мы знакомы: если m = 2, а n = 1, то отрезок AF является медианой, которая делит треугольник ABC на два равновеликие треугольники ABF и AFC (см. <u>свойство I</u>, пункт 2)). Действительно, с помощью (2) получим

$$S_{\Delta AFC}=\frac{2mS}{2m+n}=\frac{2\cdot1\cdot S}{2\cdot1+2}=\frac{S}{2} \text{ и } S_{\Delta ABF}=\frac{nS}{2m+n}=\frac{2\cdot S}{2\cdot1+2}=\frac{S}{2}.$$

Полученный результат (3) экспериментально легко проверить. Известно, что

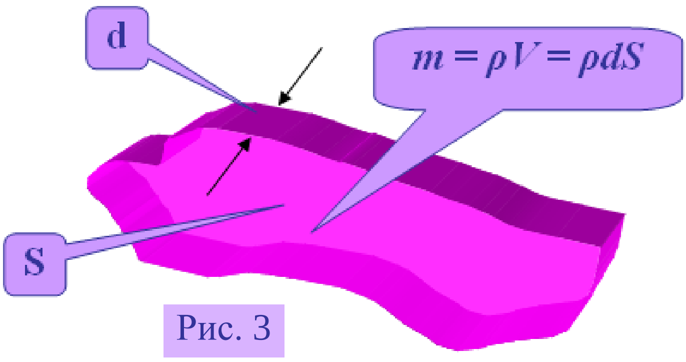


Рис. 3

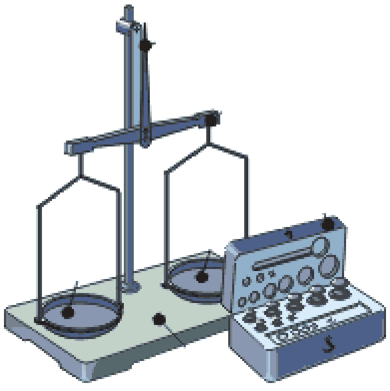
масса m (вес P = mg, g - ускорение свободного падения) однородного (гомогенного) тела, имеющего постоянную толщину d прямо пропорциональна его площади S.

$$\boldsymbol{m=\rho V=\rho dS}$$

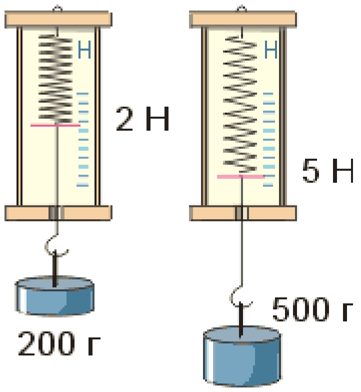
В этой формуле ρ – плотность вещества, V - объем тела, причем предполагаются ρ = const и d = const по всему телу. То есть если на чашах рычажных весов поместить кусочки треугольников из рисунка 1, то в определенных случаях можно добиться равновесия, а в других случаях можно просто взвешивать данный фрагмент тела.

3. Экспериментальная часть

В этой, лабораторной, части работы необходимы рычажные или пружинные весы, которые обязательно имеются любом кабинете физики, альбомный лист бумаги формата А4, ножницы, желателен персональный компьютер с программой Microsoft Word. В случае отсутствия последнего можно обходиться линейкой и карандашом. Начнем с того, что в программе Microsoft Word создадим файл, откроем панель рисования. Проведем прямую горизонтальную линию (отрезок АС) известной длины. Для этого в диалоговом



окне «Формат автофигуры» необходимо установить высоту линии 0 см, а ширину, например 15 см. Далее в инструменте «Автофигуры», в подразделе «Полилинии» достраиваем произвольный треугольник.



Два равнобедренных или прямоугольных треугольника в Основных фигурах являются частными случаями. При необходимости можно просто пользоваться этими треугольниками, если нет желания построить их по трем сторонам.

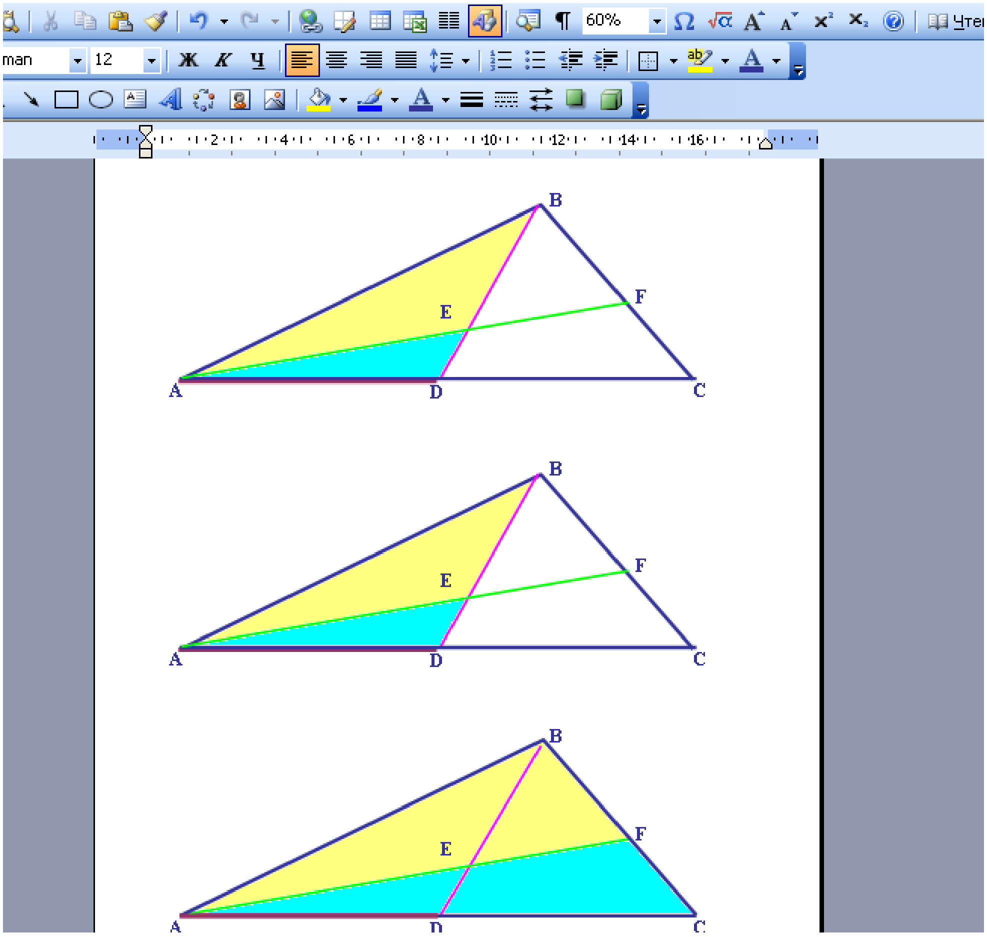


Рис. 4

Далее находим середину D отрезка АС, проводим медиану BD, отмечаем на ней точку E и окончательно проводим отрезок AF, проходящий через точку E. Все необходимые величины определяем с помощью диалогового окна. После этого копируем (инструмент «Копировать») полученный рисунок и еще два раза его вставляем (инструмент «Вставить») в документе. Когда на листе имеются равномерно распределенные три треугольника, файл печатаем на бумагу, а ее клеем на картон.

Вооружаясь ножницами, первый и второй рисунки с треугольниками вырезаем на части ABE и AED, а третий рисунок на части ABF и AFC.

После этого очередь подходит к подвешиванию полученных фигур. Опыт можно сопровождать вычислением погрешности, что неизбежно при взвешивании.

Реализуем три задания:

случай первый - *точка E середина отрезка* BD*, то массы фигур* ABE AED *равны, а при взвешивании масса фигуры* AFC *должна уравновешиваться двойной массой фигуры* ABF;

случай второй - *экспериментальная проверка* ***свойства I*** *(пункты 2) и 3)) медиан треугольника с помощью взвешивания;*

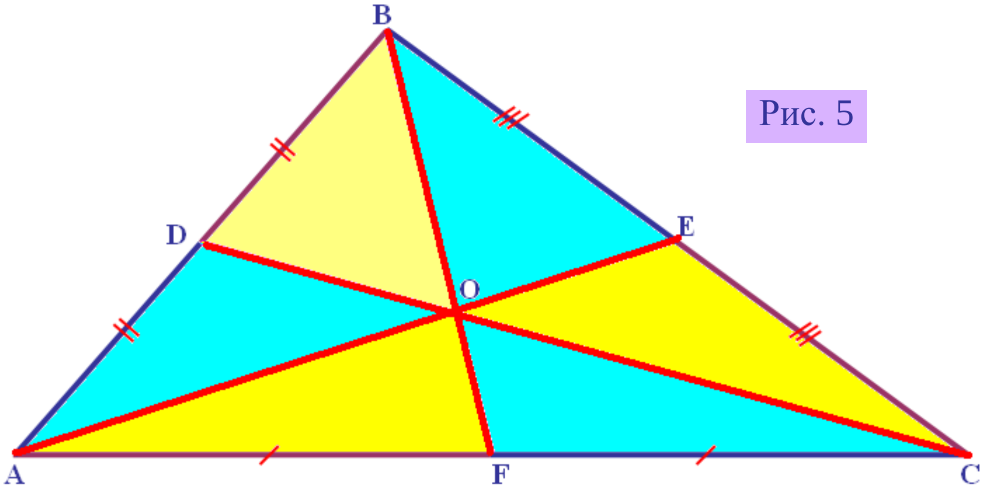


Рис. 5

случай третий – *точка* E *подбирается произвольно на медиане* BD (общий случай).

В итоге предлагается физическая проверка геометрического результата. Для трех органически связанных школьных предметов разрабатывается модель общего рассмотрения. Очевидно, что любую задачу такого рода можно подвергать указанному анализу. Заметим, что рычажные весы хорошо использовать, когда проверяется равновесие тел, тогда как пружинные весы (динамометры) напрямую взвешивают массу (вес) тела, а результаты измерения подвергаются дальнейшей обработке.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЗИВ Б.Г., Задачи к урокам геометрии. 7 – 11 классы. – С.-Петербург, 1998. НПО «Мир и Семья-95».

2. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, Кадомцев и др. Геометрия: Учебник. для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений. – изд. 16. – М.: Просвещение, ОАО «Московские учебники». – 2006.

3. Перышкин А.В., Гутник Е.М. Физика. 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений, 8-е изд., - М.: Дрофа, 2004

4. Мякишев Г Я Буховцев Б Б Сотский Н Н Физика Учебник для 10 классов общеобразовательных учреждений. изд 12-е 14-е. М Издательство «Просвещение». М.: - 2005.

5. В.Л.Экелекян. Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике 2004 № 37 ИНФОРМАТИКА

6. В.Л.Экелекян. Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office 2004 № 45 ИНФОРМАТИКА, 2004 № 46 ИНФОРМАТИКА

7. В.Л.Экелекян. Определение центра масс неправильного тела ***Физика № 48/04***

8. В.Л.Экелекян. Проверка уравнения теплового баланса ***Физика № 29/04***

9. В.Л.Экелекян. Относительность движения ***Физика № 1/06***

10. В.Л.Экелекян. Основы информатики и вычислительной техники – учебно-методические лабораторные разработки-рекомендации для студентов и молодых научных работников-выпускников медицинских институтов Ереван 1988