Прямоугольный треугольник ABC ***разделен высотой*** CD***, проведенной к гипотенузе, на два треугольника -*** BCD ***и*** ACD***. Радиусы окружностей, выписанных в эти треугольники, равны*** 4 ***и*** 3 ***соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник*** ABC***.***

Дано: ΔABC, $BC \perp AC$, $CD \perp AB$,
Окр $\{O_a, r_a = 4\}$ - вписанная в ΔCBD,
Окр $\{O_b, r_b = 3\}$ - вписанная в ΔCDA,
Окр $\{O, r\}$ - вписанная в ΔABC.

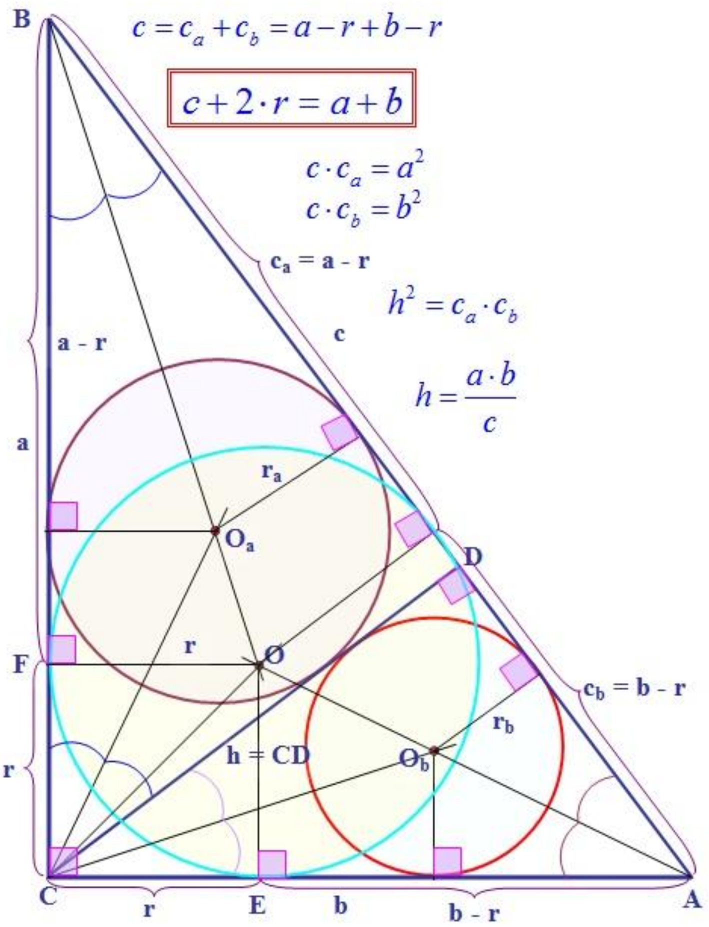
Найти: $r = ?$

Решение:

Задачу решим в два этапа.

Этап первый: нахождение связи между радиусом r вписанной в прямоугольный треугольник ABC, катетами a и b, и гипотенузой c. Для этого воспользуемся

1) свойствами высоты h, опущенной из прямого угла прямоугольного треугольника ABC:



$$h^2 = c_a \cdot c_b, \qquad (1)$$

$$c \cdot c_a = a^2, \qquad (2)$$

$$c \cdot c_b = b^2, \qquad (3)$$

$$h = \frac{a \cdot b}{c} \qquad (4)$$

(здесь $\mathbf{c_a}$ и $\mathbf{c_b}$ являются проекциями катетов **a** и **b** на гипотенузу **c**) и

2) свойством равенства двух касательных (например, **AE** и **AD**, а также **BF** и **BD**) проведенных из внешней точки (например, **A** и **B**) к окружности:

$$AE = AD \Rightarrow b - r = c_b \qquad (5)$$

$$BD = BF \Rightarrow a - r = c_a \qquad (6)$$

С другой стороны, длина гипотенузы равна сумме длин проекций катетов на гипотенузу:

$$c = c_a + c_b = a - r + b - r = a + b - 2 \cdot r,$$

что дает возможность сформулировать важный вывод:

<u>сумма катетов равна сумме гипотенузы и диаметра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник</u>

$$a + b = c + 2 \cdot r. \qquad (7)$$

Этап второй: два раза применим результат (7) наряду со свойствами (2) – (4) для прямоугольных треугольников BCD и ACD:

$$h + c_a = a + 2 \cdot r_a \Rightarrow \frac{a \cdot b}{c} + \frac{a^2}{c} = a + 2 \cdot r_a \Rightarrow a \cdot (a + b) = c \cdot (a + 2 \cdot r_a), \qquad (8)$$

$$h+c_b=a+2\cdot r_b \Rightarrow \frac{a\cdot b}{c}+\frac{b^2}{c}=a+2\cdot r_b \Rightarrow b\cdot(a+b)=c\cdot(b+2\cdot r_b)\,. \qquad (9)$$

Еще раз применим свойство (7) к соотношениям (8) и (9)

$$a\cdot(c+2\cdot r)=c\cdot(a+2\cdot r_a)\Rightarrow a\cdot r=c\cdot r_a\,, \qquad (10)$$

$$b\cdot(c+2\cdot r)=c\cdot(a+2\cdot r_b)\Rightarrow b\cdot r=c\cdot r_b\,. \qquad (11)$$

Возведем соотношения (10) и (11) в квадрат и просуммируем, дополнительно учитывая теорему Пифагора $c^2=a^2+b^2$:

$$r^2\cdot(a^2+b^2)=c^2\cdot(r_a^2+r_b^2)\Rightarrow r^2=r_a^2+r_b^2\,.$$

В итоге получим:

$$r=\sqrt{r_a^2+r_b^2}\Rightarrow r=5\,.$$

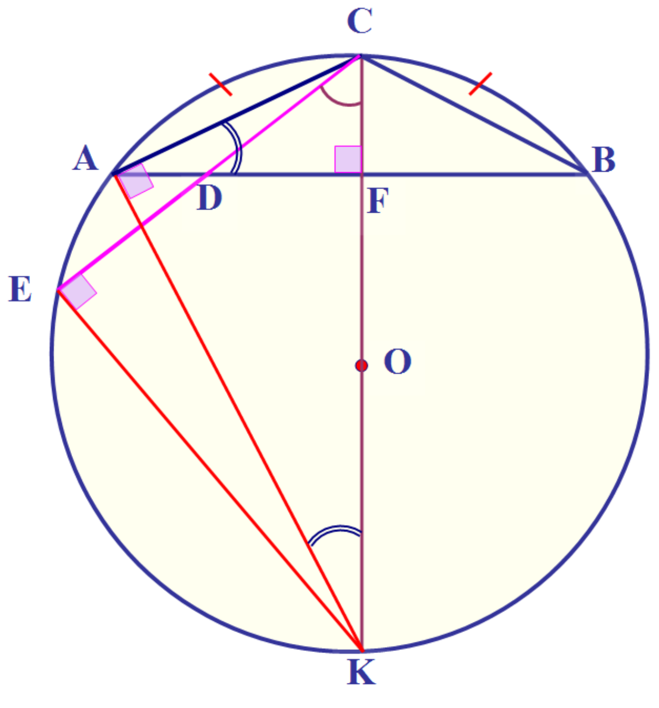
Ответ: $r=5$

Вар. 1, задача 23-я

Через точку D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD, пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E. Найдите AC, если $CE=3$ и $DE=DC$.

Дано: ΔABC, $AC=CB$, $D\in AB$,
Окр$\{O,R\}$ - описанная около ΔABC,
$E\in Окр\{O,R\}$
$DE=DC$, $CE=3$.

Найти: $AC=?$



Решение:

Для решения задачи

1) опустим высоту $CF\perp AB$ из вершины C треугольника ABC и продолжим до точки K пересечения с окружностью и

2) соединим точки E и K.

Треугольники CAK и CEK прямоугольные, так как вписанные углы A и E опираются на диаметре $d=CK=2\cdot R$ окружности.

Рассмотрим прямоугольные треугольники AKC и FAC. У них по одному равному острому углу: $\angle AKC=\angle CAB$, так как эти вписанные углы опираются на равные дуги AC и CB (треугольник ABC равнобедренный). Следовательно, эти прямоугольные треугольники подобны по одному равному острому углу, а также имеет место равенство отношений:

$$\frac{AC}{CK}=\frac{CF}{AC}\Rightarrow AC^2=CF\cdot CK\,. \qquad (1)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники KEC и CDF (треугольник KEC прямоугольный, так как вписанный угол $\angle CEK$ опирается на диаметре CK). У них общий острый угол $\angle ECK = \angle DCF$. Эти прямоугольные треугольники также подобны по одному равному острому углу, и, в свою очередь, имеет место равенство отношений:

$$\frac{EC}{CK} = \frac{CF}{DC} \Rightarrow CF = DC \cdot \frac{EC}{CK} = \frac{EC^2}{2 \cdot CK}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) окончательно получим:

$$AC^2 = \frac{EC^2}{2} \text{ или } AC = \frac{EC}{\sqrt{2}}.$$

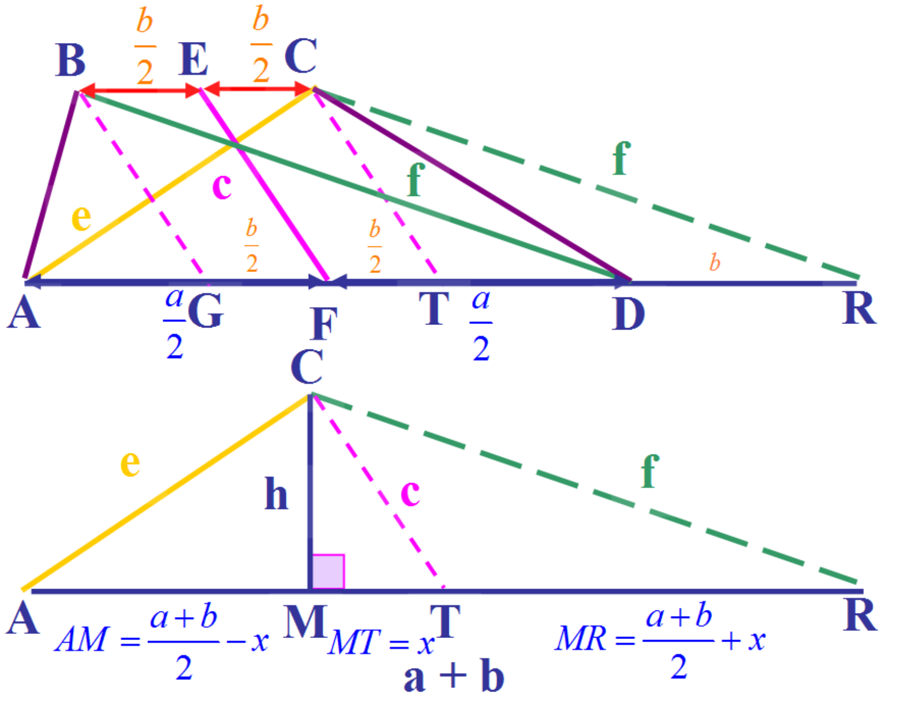
Ответ: $AC = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$.

Вар. 4, задача 23-я

Найдите площадь трапеции, если ее диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2.

Дано: $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$,
$AC = e = 3$, $BD = f = 5$,
$AF = FD = a/2$,
$BE = EC = b/2$,
$EF = c = 2$.

Найти: $S_{ABCD} = ?$



Решение:

Для решения задачи проведем отрезок CR параллельно диагонали BD и отрезки CT и BG, параллельные отрезку EF.

Рассмотрим параллелограммы $BCRD$, $ECTF$ и $BEFG$, соответственно со сторонами и $\{c, b/2\}$. Легко видеть, что $AR = a + b$ и $AT = TR = \dfrac{a+b}{2}$, так что для треугольника ACR со сторонами $[e; f; (a+b)]$ отрезок CT с длиной c является медианой. Воспользуемся известной формулой, связывающей три известные стороны треугольника с медианой, опущенной на сторону AR:

$$2 \cdot (e^2 + f^2) = (a+b)^2 + (2 \cdot c)^2,$$

откуда легко найти нужную для вычисления площади трапеции величину суммы оснований:

$$a + b = \sqrt{2 \cdot (e^2 + f^2 - 2 \cdot c^2)}. \qquad (1)$$

Для вычисления высоты h ($CM \perp AD$, $h = CM$) трапеции $ABCD$ обратимся к треугольнику ACR и введем проекцию x медианы CT на основание AR. Из теоремы Пифагора получим величины x и h:

$$h^2 = e^2 - \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 = f^2 - \left(\frac{a+b}{2} + x\right)^2 = c^2 - x^2,$$

$$x = \frac{f^2 - e^2}{2\cdot(a+b)} \quad \text{и} \quad h^2 = c^2 - \frac{(f^2 - e^2)^2}{4\cdot(a+b)^2}.$$

Имея ввиду что площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2}\cdot h$, можем записать:

$$S^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot h^2 = \frac{c^2\cdot(a+b)^2}{4} - \frac{(f^2 - e^2)^2}{16}$$

или, учитывая выражение (1) для (**a** + **b**), придем к окончательному результату:

$$S = 0,25\cdot\sqrt{8\cdot c^2\cdot(e^2 + f^2 - 2\cdot c^2) - (f^2 - e^2)^2}. \qquad (2)$$

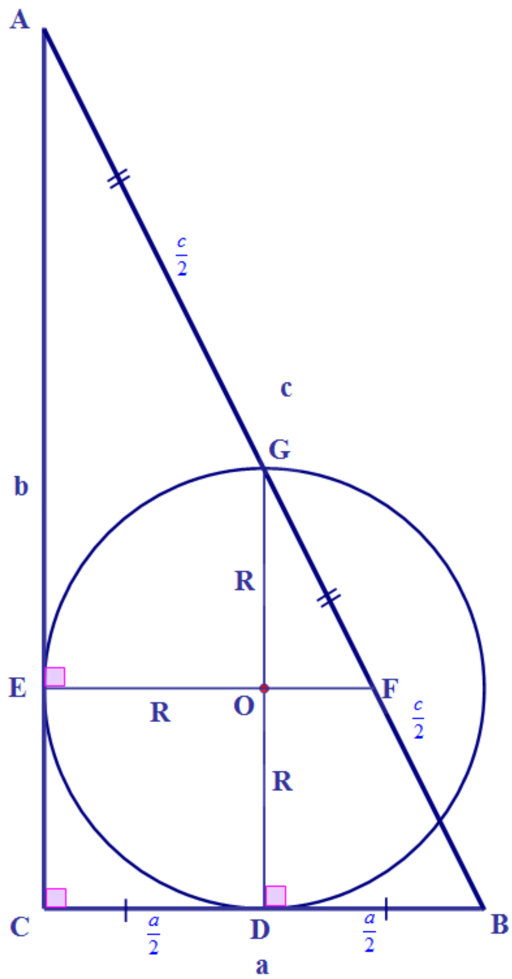
Произведем численный расчет по формуле (2) по данным условий задачи:

$$S = 0,25\cdot\sqrt{8\cdot 2^2\cdot(3^2 + 5^2 - 2\cdot 2^2) - (5^2 - 3^2)^2} = 0,25\cdot 4\cdot\sqrt{52 - 16} = 6.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 6$.

Вар. 2, задача 23-я

Окружность проходит через середины гипотенузы AB ***и катета*** BC ***прямоугольного треугольника*** ABC ***и касается катета*** AC. ***В каком отношении точка касания делит катет*** AC ***?***



Дано: ΔABC, $AC \perp BC$,

$AG = GB = c/2$,

$CD = DB = a/2$,

Окр $\{O, R\}$,

$D, G \in$ Окр $\{O, R\}$,

AC – касательная Окр $\{O, R\}$,

$E \in$ Окр $\{O, R\}$, $E \in AC$.

Найти: $\frac{AE}{EC} = ?$

Решение:

Для решения задачи соединим точки G и D - середины гипотенузы AB и катета CB отрезком GD, который автоматический превращается в среднюю линию для треугольника ABC. Но средняя линия параллельна основанию и равна его половине:

$$GD \parallel BC \text{ и}$$

$$GD = BC/2.$$

Катеты взаимно перпендикулярны, следовательно

$$GD \perp BC.$$

Однако радиус окружности в точке касания перпендикулярен касательной и наоборот, линия, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, является касательной. В результате приходим к выводу, что окружность пересекает катет CB только в одной точке D, средняя линия GD является диаметром окружности

$$GD = 2 \cdot R = b/2,$$

где b - катет BC прямоугольного треугольника ABC.

Очевидно, что

$$EC = CD = R = b/4,$$

откуда следует ответ задачи:

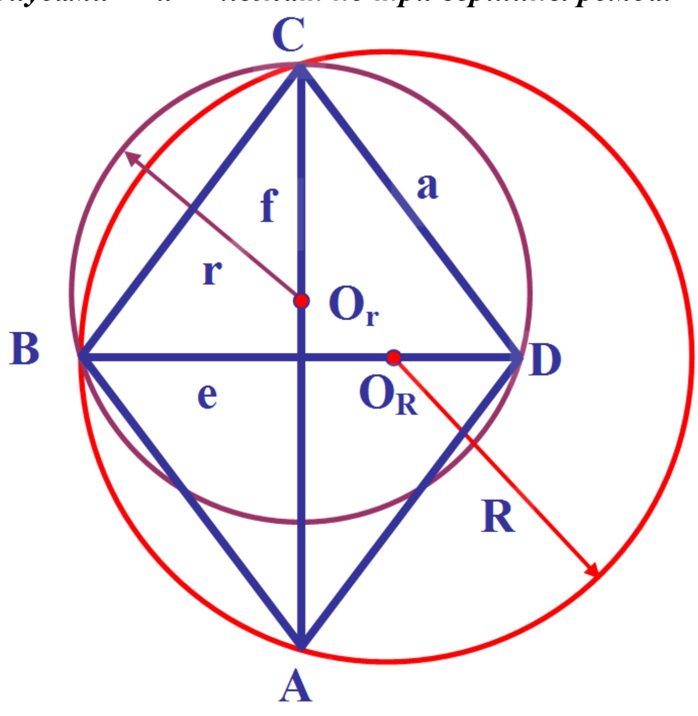
$$\frac{AE}{EC} = \frac{b - \frac{b}{4}}{\frac{b}{4}} = 3.$$

Ответ: $AE : EC = 3:1$.

На каждой из двух окружностей с радиусами 3 и 4 лежат по три вершины ромба. Найдите его сторону.

Дано: $ABCD$ – ромб,
Окр $\{O_r, r = 3\}$,
Окр $\{O_R, R = 4\}$,
$B, C, D \in$ Окр $\{O_r, r\}$,
$A, B, C \in$ Окр $\{O_R, R\}$.

Найти: $AB = a = ?$



Решение:

Для решения задачи введем обозначения $e = BD$ и $f = AC$ для диагоналей ромба и вспомним свойства этих диагоналей:

- они взаимно перпендикулярны $e \perp f$,
- они точкой пересечения делятся пополам,
- площадь ромба равна полупроизведению диагоналей

$$S_{ABCD} = \frac{e \cdot f}{2},$$

а также воспользуемся теоремой Пифагора

$$e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2. \qquad (1)$$

Из курса геометрии известна формула, связывающая три стороны треугольника **{a, b, c}**, площадь **S** этого треугольника с радиусом **R** описанной около этого треугольника окружности:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}. \qquad (2)$$

Имея в виду, что площади треугольников BCD (стороны **{a, a, e}**) и ABC (стороны **{a, a, f}**) равны половине площади ромба **S = e f / 4** , а также что окружность с радиусом **r** описана около треугольника **BCD** и окружность с радиусом **R** описана около треугольника **ABC**, можно записать:

$$\frac{e \cdot f}{4} = \frac{a^2 \cdot e}{4 \cdot r} \Rightarrow a^2 = f \cdot r \Rightarrow f = \frac{a^2}{r}, \qquad (3)$$

$$\frac{e\cdot f}{4}=\frac{a^2\cdot f}{4\cdot R}\Rightarrow a^2=e\cdot R\Rightarrow e=\frac{a^2}{R}. \qquad (4)$$

Если теперь эти соотношения возвести в квадрат и сложить, учитывая условие (1), то получим:

$$e^2+f^2=a^4\cdot\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)\Rightarrow\frac{r^2+R^2}{r^2\cdot R^2}\cdot a^4=4\cdot a^2 \text{ или } a=\frac{2\cdot r\cdot R}{\sqrt{r^2+R^2}}. \qquad (5)$$

Численный ответ будет: $a=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{24}{25}=4{,}8$.

Ответ: $4{,}8$.

ЕГЭ 2010, Математика, Задача С4, Касающиеся окружности, Подготовительные задачи, 9.14. стр. 68

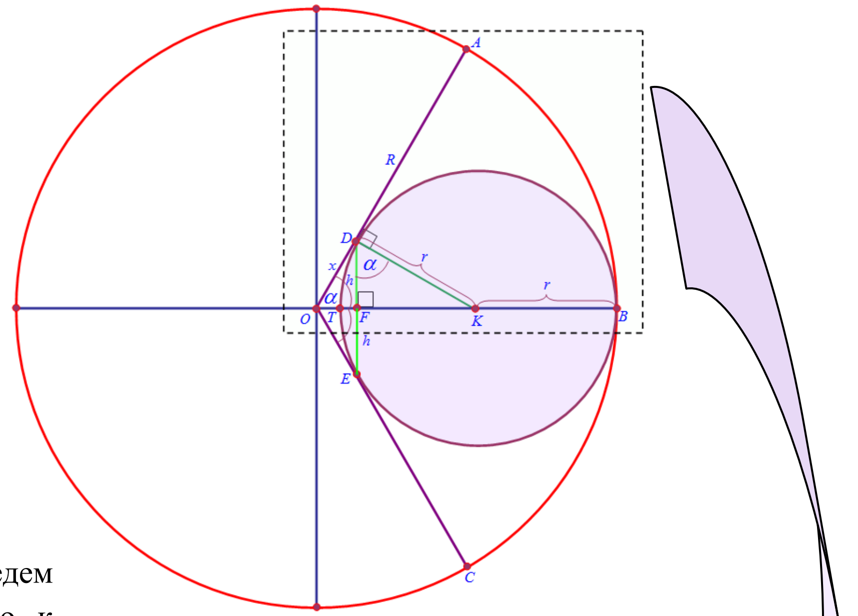
В круговой сектор с центральным углом 120^0 ***вписана окружность. Найдите ее радиус, если радиус данной окружности равен*** R***.***

Дано: Окр $\{O,R\}$.

Окр $\{O_K,r\}$ - вписанная в круговой сектор $OABC$.

Центральный угол $\angle AOC = 2\alpha = 120^0$.

Найти: $r = ?$



Решение:

Для решения задачи проведем радиус $OA = R$ как касательную к окружности $\{O_K, r\}$ в точке D.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ODK с острым углом $\angle DOK = \alpha$.

Построим высоту $DF = h$ к гипотенузе $DF \perp OK$ и обозначим буквой OD катет x.

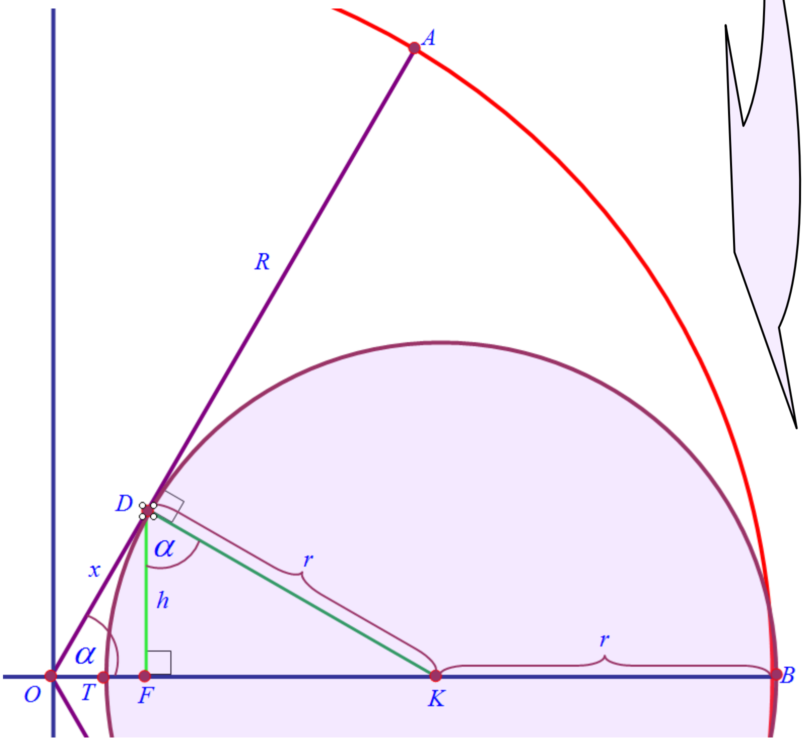
Учитывая подобие треугольников ADF, DKF и ODK запишем очевидные тригонометрические соотношения:

$$x = r \cdot ctg\alpha, \qquad h = r \cdot \cos\alpha,$$

$$OF = r \cdot ctg\alpha \cdot \cos\alpha,$$

$$FK = r \cdot \sin\alpha,$$

$$OK = \frac{r}{\sin\alpha} \qquad (1)$$



а также связь между радиусами R и r:

$$OK = R - r. \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получим:

$$R - r = \frac{r}{\sin\alpha} \Rightarrow \qquad r = R \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Произведем расчет по формуле (3):

$$r = R \cdot \frac{\sin 60^0}{1+\sin 60^0} = R \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2} = R \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}{4-3} = R\cdot(2\sqrt{3}-3).$$

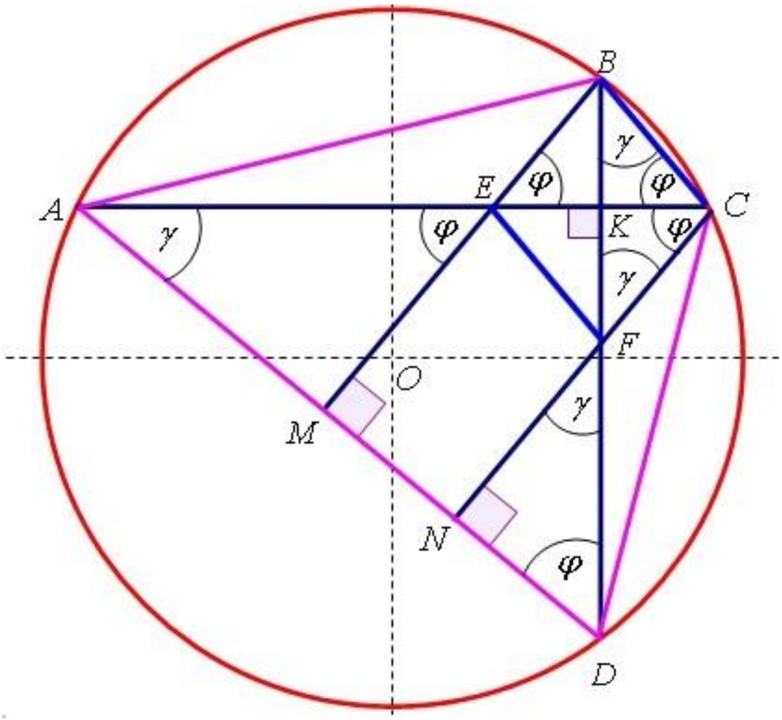
Ответ: $r = R\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, $r = R\cdot(2\sqrt{3}-3)$.

Вар. 8, задача 23-я

Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Известно, что $BC = 1$. Найдите EF.

Дано: ABCD - четырехугольник,
Окр{O, R} – описанная ABCD,
AC и BD - диагонали ABCD,
$AC \perp BD$,
$BM \perp AD$, $CN \perp AD$,
$E \in BM$, $E \in AC$,
$F \in CN$, $F \in BD$,
$BC = 1$.

Найти: $EF = ?$



Решение:

Отрезки MB и NC одновременно перпендикулярны отрезку AD, следовательно, они параллельны: $MB \parallel NC$. Так что у выпуклого четырехугольника $BCFE$ две стороны BE и CF параллельны.

Вписанные углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$ опираются на дуге окружности CD, следовательно, они равны между собой: $\angle CAD = \angle CBD = \gamma$. Вписанные углы $\angle ADB$ и $\angle ACB$ опираются на дуге окружности AB, следовательно, они равны между собой: $\angle ADB = \angle ACB = \varphi$.

Треугольники AEM, FDN и BCK прямоугольные. Следовательно $\gamma + \varphi = 90^0$, $\angle AEM = 90^0 - \angle MAE = 90^0 - \gamma = \varphi$.

Углы $\angle AEM$ и $\angle BEC$ вертикальны, следовательно, они равны: $\angle BEC = \varphi$.

Параллельные прямые BM и CN пересекаются третьей прямой CA. Тогда углы $\angle BEC$ и $\angle ECF$ являются внутренне накрест лежавшимися, которые, как известно равны: $\angle OCF = \varphi$.

Наконец, из-за того, что треугольник CFK прямоугольный, получаем:

$$\angle KFC = 90^0 - \varphi = \gamma .$$

Очевидно, что треугольники BCF и EBC равнобедренные:

$$BC = CF \text{ и } EB = BC \;\Rightarrow\; EB = FC . \qquad (1)$$

Получили, что в четырехугольнике $BCFE$ стороны EB и FC параллельны и равны, следовательно, согласно известному признаку четырехугольник $BCFE$ он является параллелограммом, и из-за условия (1) он является еще ромбом:

$$BC = CF = FE = EB . \qquad (2)$$

т.е. $EF = BC = 1$.

Итак, при решении задачи были использованы следующие геометрические понятия и свойства:

- если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны;
- сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0;
- в окружности внутренние углы, растягивающие одинаковые дуги, равны;
- вертикальные углы равны;
- если в треугольнике два угла равный, то треугольник является равнобедренным;
- если в четырехугольнике две стороны параллельны и равны, то четырехугольник является параллелограммом.

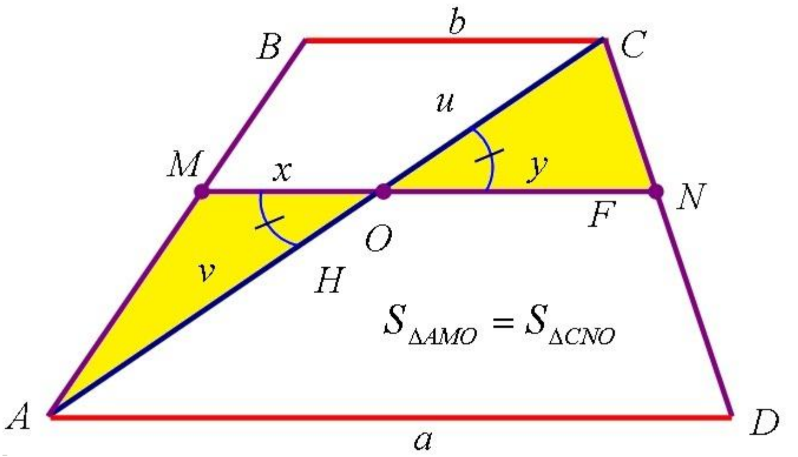
Ответ: $EF = 1$.

Вар. 7, задача 23-я

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причем отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O. Найдите MN, если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

Дано: $ABCD$ - трапеция,
$AD \parallel BC$,
$AD = a$, $BC = b$,
$M \in AB$, $N \in CD$,
$MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$,
AC - диагональ $ABCD$,
$O \in AC$, $O \in MN$,
$S_{\Delta AMO} = S_{\Delta CNO}$.

Найти: $MN = ?$



Решение:

Для решения задачи введем обозначения:

$$MO = x, \qquad NO = y; \qquad AO = v, \qquad CO = u.$$

Так как прямые MN и AD параллельны, а прямая AC (диагональ трапеции) пересекает их, то углы MOA и NOC равны как внутренние накрест лежащие.

В геометрии (планиметрии) существует теорема:
если в двух треугольниках имеются равные углы, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон составляющих эти углы.

В нашей задаче эта теорема записывается в виде:

$$\frac{S_{\Delta AMO}}{S_{\Delta CNO}} = \frac{MO \cdot OA}{NO \cdot OC},$$

а с учетом условия задачи о равенстве площадей треугольников AMO и CNO, и введенных обозначений, получим первое уравнение:

$$x \cdot v = y \cdot u. \qquad (1)$$

Так как прямые MN, AD и BC параллельны, то треугольники AMO, ABC, CNO и CDA подобны:

$$\Delta AMO \sim \Delta ABC,$$
$$\Delta CNO \sim \Delta CDA.$$

откуда следуют соотношения о пропорциональных сторонах

$$\frac{b}{x} = \frac{u+v}{v} = 1 + \frac{u}{v}, \qquad (2)$$

$$\frac{a}{y} = \frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u}. \qquad (3)$$

Из системы трех алгебраических уравнений (1) – (3) вычислим (выразим) неизвестные переменные x, y и отношение $z = u/v$ через известные в задаче буквенные данные a и b:

$$x = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \qquad y = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \qquad z = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}. \qquad (4)$$

Так как $MN = MO + ON = x + y$, окончательно получим:

$$MN = \sqrt{ab}.$$

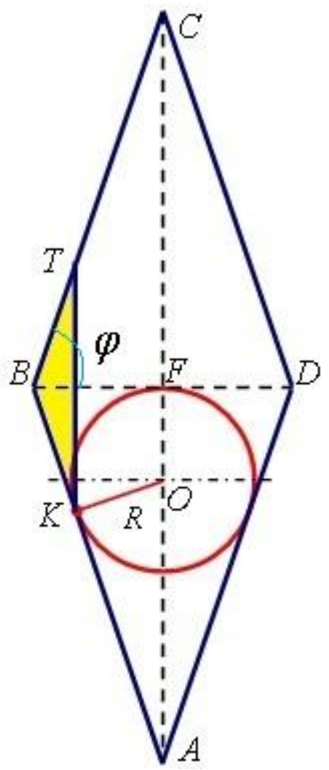
Итак, при решении задачи были использованы следующие геометрические понятия и свойства:

- свойство площадей двух треугольников, имеющих равный угол;
- свойство подобных треугольников;
- техника решения трех алгебраических уравнений по отношению к трем переменным.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Вар. 9, задача 23-я

Площадь ромба $ABCD$ равна 18. В треугольник ABD вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K. Через точку K проведена прямая, параллельная диагонали AC и отсекающая от ромба треугольник площади 1. Найдите синус угла BAC.



Дано: $ABCD$ - ромб,
$S_{ABCD} = 18$,
$Окр\{O;R\}$ вписана в ΔABD,
$K \in Окр\{O;R\}$, $K \in AB$,
$T \in BC$, $KT \parallel AC$,
$S_{\Delta KBT} = 1$.

Найти: $\sin \angle BAC = ?$

Решение:

Для решения задачи введем обозначения:

$AB = a$; $\quad \angle CBD = \varphi$.

Тогда легко убедиться, что

$$BF = a \cdot \cos\varphi.$$

С другой стороны

отрезки BF и BK выходят из одной точки и являются касательными окружности $Окр(O;R)$ и согласно известной теоремы они равны:

$$BF = BK = a \cdot \cos\varphi . \qquad (1)$$

Площадь ромба $ABCD$ вычислим по известной формуле:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = a^2 \cdot \sin 2\varphi = 18 . \qquad (2)$$

Площадь равнобедренного треугольника ABC вычислим по формуле:

$$S_{\Delta KBT} = \frac{1}{2} \cdot KB \cdot BT \cdot \sin\angle KBT = \frac{1}{2} \cdot BF^2 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin 2\varphi = 1 . \qquad (3)$$

Учитывая соотношения (2) и (3) получим:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{9} \text{ или } \cos\varphi = \frac{1}{3} . \qquad (3)$$

Тогда длину половины малого диагонали CD можно вычислить по формуле (1):

$$BF = a \cdot \cos\varphi = \frac{a}{3} .$$

Синус угла BAC вычислим, используя определение синуса острого угла в прямоугольном треугольнике BAF:

$$\sin\angle BAF = \frac{BF}{AB} = \frac{a}{3} : a = \frac{1}{3} .$$

Итак, при решении задачи были использованы следующие геометрические понятия и свойства:

- свойство равенства касательных проведенных из внешней точки к окружности;
- формулы площади ромба и треугольника через длины двух сторон и угла между ними;
- определение синуса и косинуса острых углов в прямоугольном треугольнике.

Ответ: $1/3$.

Вар. 10, задача 23-я

В треугольнике KLM угол L тупой, а сторона KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, приходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.