Экелекян Варужан Левонович
педагог физики, математики и информатики ГБОУ Лицей 1561, Москва

Помощь тем, кто сдает экзамен по физике и математике в формате ЕГЭ
7. Радиусы вписанных описанных к треугольнику окружностей

Задача: Медиана прямоугольного треугольника, проведенного из прямого угла, делит его на два треугольника, в которые вписаны окружности радиусов r_a и r_b .

а) Найти острые углы этого треугольника.

б) При известной длине медианы m , найти радиусы r и R вписанной и описанной окружностей исходному треугольнику.

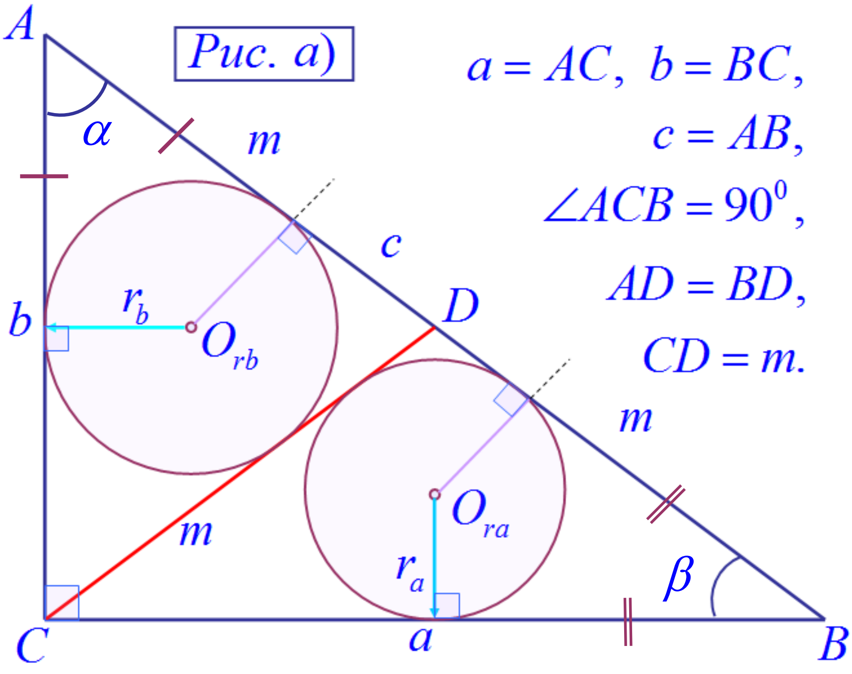
Дано: $\Delta ABC;\ \angle ACB = 90^0;$
$AD = DB;\ CD = m;$
$Окр\{O_{ra}; r_a\} - вписана\ в\ \Delta CBD;$
$Окр\{O_{rb}; r_a\} - вписана\ в\ \Delta ACD;$
$Окр\{O_r; r\} - вписана\ в\ \Delta ABC;$
$Окр\{O_R; R\} - описана\ к\ \Delta ABC;$

Найти:
а) $\angle BAC = ?\ \ \angle ABC = ?$
б) $r = r(m) = ?\ \ R = R(m) = ?$

Решение:

При решении а) части задачи нам нужны будут следующие хорошо известные из курса геометрии теоремы (в дальнейшем кратко ***ТГ***):

1. Медиана треугольника делит треугольник на два треугольника равной площади;
2. Медиана m прямоугольного треугольника проведенная из прямого угла равна половине гипотенузы c : $m = c/2$;
3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла делит треугольникна два равнобедренные треугольника;
4. Площадь S треугольника равна произведению полупериметра p на радиус r вписанной окружности: $S = p \cdot r$;
5. Площадь S треугольника можно вычислить по формуле: $S = \dfrac{abc}{4R}$, где a, b и c - суть стороны треугольника, а R - радиус описанной к треугольнику окружности;



6. Диаметр окружности описанной к прямоугольному треугольнику равен гипотенузе, а центр этой окружности совпадает с серединой гипотенузы.

Для решения поставленной задачи введем следующие обозначения, которые также приведены в условиях (см. Рис а)):

a, b - катеты, а c - гипотенуза прямоугольного треугольника ABC;

$m = CD$ - медиана ΔABC, проведенная из прямого угла C;

r_a - радиус вписанной в треугольник BCD окружности;

r_b - радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

Имея ввиду условие 2. –

$$c = 2m$$

и условие 3. –

треугольники ACD и BCD равнобедрены,

для полупериметров этих треугольников можем записать:

$$p_{\Delta BCD} = p_a = \frac{2m+a}{2} = \frac{c+a}{2};$$

$$p_{\Delta ACD} = p_b = \frac{2m+b}{2} = \frac{c+b}{2}.$$

Площадь прямоугольного треугольника ABC равна полупроизведению катетов:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2},$$

Из-за условия 1. можем утверждать:

$$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABC}/2 = \frac{ab}{4}.$$

С помощью теоремы 4. установим связь между радиусами r_a, r_b и сторонами треугольника a, b, c:

$$\begin{cases} 2r_a(a+c) = ab; & (1) \\ 2r_b(b+c) = ab. & (2) \end{cases}$$

Система уравнений (1) – (2) сочетается еще теоремой Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (3)$$

которая уже учтена в рамках утвержения 2.

Из системы (1) – (2) получим:

$$c(r_a - r_b) = br_b - ar_a \qquad (4)$$

$$r_a - \mathrm{r}_b = \frac{b}{c}\cdot \mathrm{r}_b - \frac{a}{c}\cdot \mathrm{r}_a\,. \qquad (5)$$

Записав синус и косинус тригонометрические функции острого угла α :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

перепишем соотношение (5) в виде

$$\mathrm{r}_a(1+\sin\alpha) = r_b(1+\cos\alpha) \Rightarrow r_a(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})^2 = 2r_b\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

или

$$\left(1+\frac{\sin{\alpha}/{2}}{\cos{\alpha}/{2}}\right)^2 = 2\cdot\frac{r_b}{r_a} \Rightarrow \left(1+tg\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{r_b}{r_a}. \qquad (6)$$

Если ввести безразмерный параметр τ :

$$\tau = \sqrt{2\cdot\frac{r_b}{r_a}}, \qquad (7)$$

то получим выражение:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \tau - 1,$$

или воспользуясь известным соотношением тангенса половинного аргумента:

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1-tg^2\varphi}$$

окончательно определим:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2(\tau-1)}{1-(\tau-1)^2} \Rightarrow$$

$$tg\alpha = \frac{2(\tau-1)}{\tau(2-\tau)}. \qquad (8)$$

Для угла β соответственно получим:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\tau(2-\tau)}{2(\tau-1)}. \qquad (9)$$

Проверим уже полученный результат (8) для частного случая, когдв радиусы равны:

$$r_a = r_b \Rightarrow \tau = \sqrt{2}.$$

Тогда из соотношения (6) получаем вполне ожидаемое значение для тангенса угла $\angle BAC$

$$tg\alpha = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})} = 1 \Rightarrow .$$

$$tg\angle ABC = \angle ABC = 45^0.$$

В качестве тренировки преобразуем исходное уравнение (4). Если возвести обе стороны (4) в квадрат и пользоватся условием (3) с целью исключения гипотенузы c, то получится соотношение, связывающее радиусы r_a и r_b с катетами a и b:

$$(a^2+b^2)(r_a-r_b)^2 = (ar_a - br_b)^2. \qquad (10)$$

Это есть квадратичная однородная форма по отношению катетов a, b. Если обе части этого уравнения разделить на a^2 и вводить новое переменное x как отношение этих катетов (это есть тангенс острого угла $\angle ABC = \angle B$):

$$x = \frac{b}{a} = tg\angle B \qquad (11)$$

то получим выражение:

$$(x^2+1)(r_a-r_b)^2(r_a-xr_b)^2 \Rightarrow x^2(r_b^2-(r_a-r_b)^2 - 2xr_ar_b + r_a^2 - (r_a-r_b)^2,$$

или, после небольшого преобразования – приведения к квадратному уравнения –

$$r_a(2r_b-r_a)x^2 - 2r_ar_bx + r_b(2r_a-r_b). \qquad (12)$$

Одна четветая часть дискриминанта уравнения (12) равна

$$D/4 = 2r_ar_b(r_a^2+r_b^2-2r_ar_b) = 2r_ar_b(r_a-r_b)^2 \geq 0, \qquad (13)$$

следовательно

$$x_{1,2} = \frac{r_a r_b \mp |r_a - r_b| \sqrt{2 r_a r_b}}{r_a (2r_b - r_a)}. \qquad (14)$$

Очевидно, что $2r_b > r_a$. Геометрическим смыслом обладают оба корня уравнения (12). Они учитывают тот факт, что:

$$\angle ABC + \angle BAC = 90^0. \qquad (15)$$

В качестве домашнего задания попробуйте доказать соответствие отношений (8) и (13).

Для расширения общего математического кругозора приведем частный случай известного неравенства Коши-Буняковского для положительных чисел u и v

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv},$$

которое правильно регулирует вопрос, связанный с соотношением (15) при разных соотношениях величин r_a и r_b. .

Решим численную задачу при значениях:

$$r_a = 1,5 r_b \Rightarrow \tau = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

Согласно формуле (8)

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{12}(3 - \sqrt{3}) \approx 0,1056 \qquad \alpha \approx 6,03^0.$$

Это будут подобные прямоугольные треугольники. Рассмотрим случай, когда $\mathrm{a} = 10$. Катет b вычислим как $\mathrm{b} = a \cdot ctg\alpha = 20 \cdot (3 + \sqrt{3}) \approx 94,6410,$ а гипотенузу $\mathrm{c} = \sqrt{a^2 + b^2} = 10\sqrt{49 + 24\sqrt{3}} \approx 95,1678.$

Приведем также значения радиусов -

$$r_a = \frac{10(3+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{49 + 24\sqrt{3}}} \approx 4,4994, \qquad r_b = \frac{2r_a}{3} \approx 2,9996.$$

Решим б) часть задачи. Пункты 2, 5 утверждений ***ТГ*** позволяют вычислить радиус R и месторасположение $O_R = D$ центра окружности описанной треугольнику ABC (см. Рис б)):

$$R = c/2 = m = CD.$$

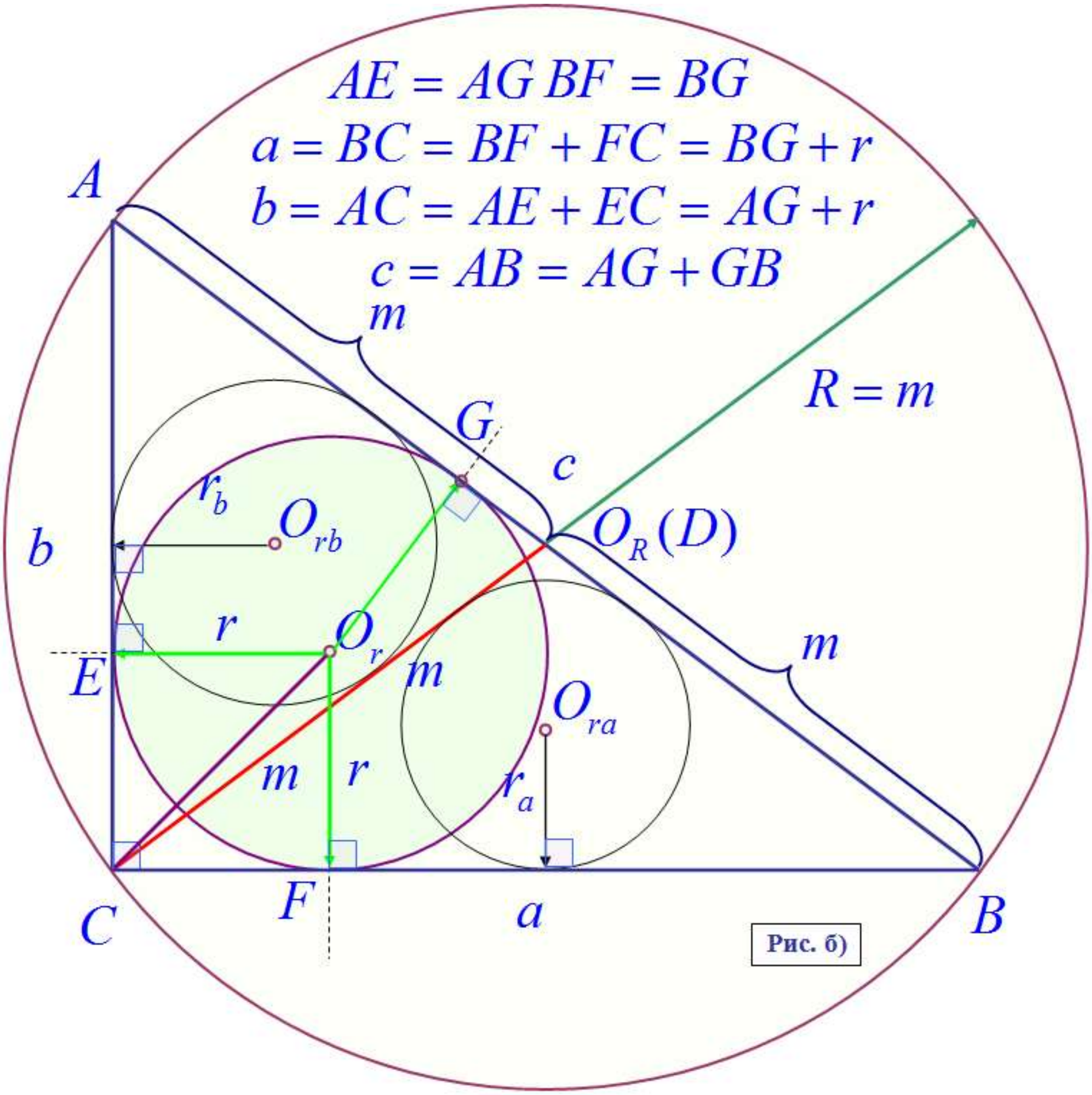


Рис. б)

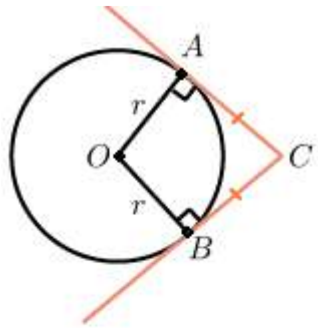
Для вычисления радиуса r вписанной в треугольник ABC окружности воспользуемся пунктом 4 ***ТГ***:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} = pr, \qquad (16)$$

где полупериметр

$$p = \frac{a+b+c}{2}. \qquad (17)$$

К списку утверждений ***ТГ*** добавим еще одно:



6. Отрезки касательных, проведённых их одной точки, равные - $AC = BC.$

В нашей задаче это означает

$$BF = BG, \text{ и } AE = AG.$$

С другой стороны:

$$AG + GB = AB = c.$$

Для полупериметра получим выражение:

$$p = \frac{r + BF + r + AE + c}{2} = \frac{2r + BG + GA + c}{2} = \frac{2r + 2c}{2} = r + c.$$

Это еще одно утверждение ***ТГ*** -

7. Полупериметр прямоугольного треугольника равен сумме гипотенузы и радиуса вписанной окружности

Согласно (16)

$$\frac{ab}{2} = (r + c)r \Rightarrow r^2 + cr - \frac{ab}{2} = 0.$$

Решая квадратное уравнение с учетом теоремы Пифагора (3) получим:

$$r_{1,2} = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 + 2ab}}{2} = \frac{-c \mp \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}}{2} = \frac{-c \mp (a + b)}{2}.$$

Геометрический смысл имеет корен:

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Этот результат можно включит в список утверждений ***ТГ*** -

8. Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен разности суммы катетов и гипотенузы.

Итак, приходим к выводу, что для решения задач № 16 по профилю (ЕГЭ, МАТЕМАТИКА) нужно по существу знать и уметь работать в среднем 8 – 10 теорем планиметрии.