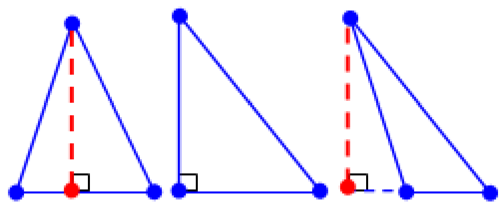
Экелекян Варужан Левонович
педагог физики ГБОУ, Лицей 1561, Москва

Помощь тем, кто сдает экзамен по физике в формате ЕГЭ
Об одной новой теореме школьного курса геометрии 8-го класса

Известно, что треугольник - самая простая плоская фигура в геометрии и треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки – его сторонами.

Целью настоящей работы является следующее: в едином ключе установить связь между длиной отрезка, который соединяет точки основания двух высот треугольника. В этом смысле работа является частью более общей теории, в которой аналогичный вопрос ставится для других элементов основных линии треугольника – медиан, биссектрис, средних линий, серединных перпендикуляров, а также всевозможных сочетаний этих элементов. [1]

Начнем с элементарных понятий [2]. Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника. Высотой треугольника также считают длину отрезка между вершиной треугольника и точкой пересечения перпендикулярной линии со стороной, противоположной вершине.



Свойства высот треугольника:

- высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой

---

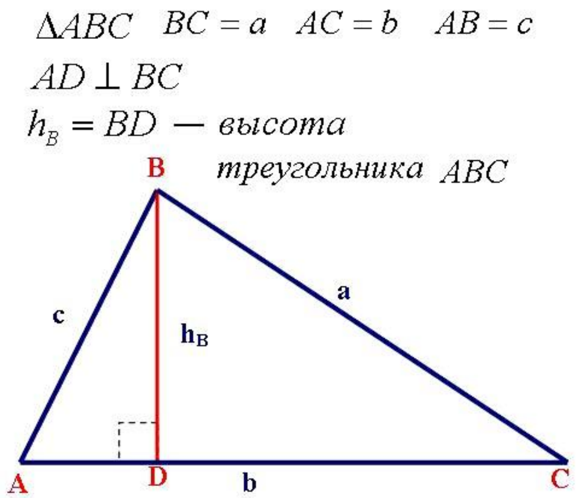
[1] *Экелекян В.Л.* **Методика интегрированного подхода в задачах физики или как задачу геометрии превратить в экспериментальную работу по физике в группах дополнительного образования различных возрастных категорий.** / **Исследовательский подход в образовании: проблема подготовки педагога.** Научно-методический сборник в двух томах./ Теория и методика в образовании: / - М.: Общероссийское общественное Движение творческих педагогов «Исследователь» МПГУ, 2012. Том 1.стр. 916 – 933

[2] ***Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений. - 20-е изд. - М. : Просвещение, 2010;***

Погорелов А.В. Геометрия. 7—9 классы: учебник для общеобразоват. учреждений. 10-е изд. - М. : Просвещение, 2009.

ортоцентром;

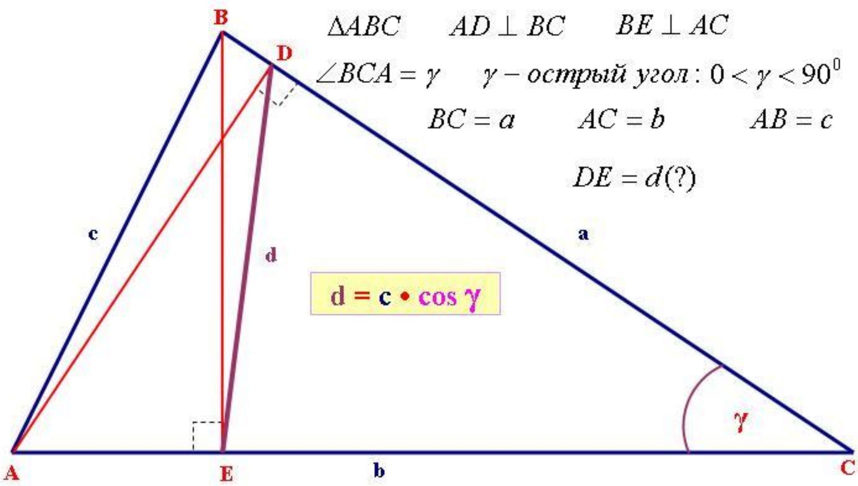
- в прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному;
- в остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники;
- для высот и сторон треугольника справедливы следующие соотношения:



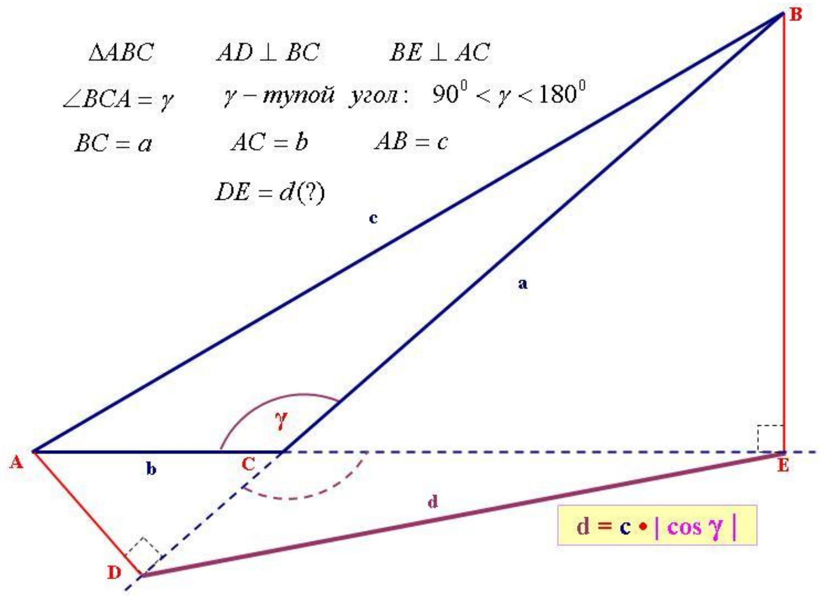
$$h_b = \frac{1}{2b}\cdot\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c} = bc : ac : ab.$$

Перейдем к решению основной задачи. Первый раз рассматриваем остроугольный треугольник ABC, в котором проведены две высоты $BE \perp AC$ и $AD \perp BC$. Ищем длину отрезка $DE = d$, соединяющего точки основания высот.



Во втором случае такая же задача ставится для тупоугольного треугольника.



Предлагается следующий алгоритм для вычисления длины отрезка d как в остроугольном, так и тупоугольном треугольниках.

- в прямоугольном треугольнике ADC выразим сторону $DC = b \cdot \cos\gamma$;
- в прямоугольном треугольнике BEC выразим сторону $EC = a \cdot \cos\gamma$;
- в треугольнике EDC применим теорему косинусов для вычисления длины искомого отрезка d :

$$d^2 = b^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 \cdot \cos^2\gamma - 2ab\cos^2\gamma \cdot \cos\gamma =$$
$$= (a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma) \cdot \cos^2\gamma, \qquad (1)$$

применяя теорему косинусов еще раз, но уже для треугольника ABC , окончательно получим

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \Rightarrow d^2 = c^2 \cdot \cos^2\gamma \Rightarrow d = c \cdot |\cos\gamma|. \qquad (2)$$

Для тупоугольного треугольника справедливы следующие соотношения:

- в прямоугольном треугольнике ADC сторона

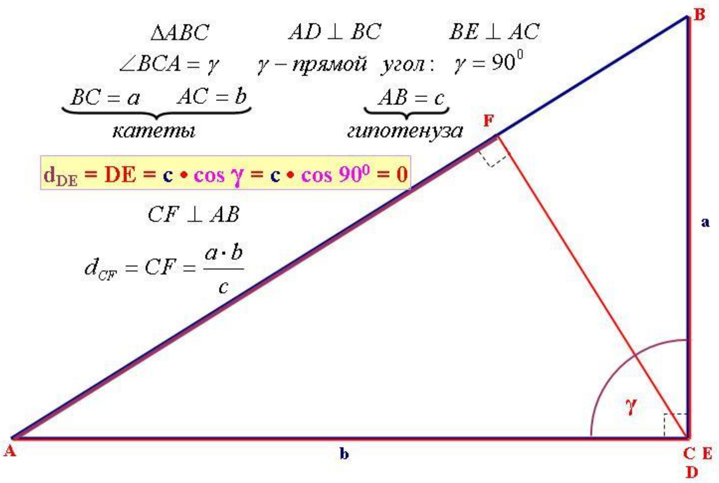
$$DC = b \cdot \cos(\pi - \gamma) = -b \cdot \cos\gamma = b \cdot |\cos\gamma|;$$

- в прямоугольном треугольнике BEC сторона

$$EC = a \cdot \cos(\pi - \gamma) = -a \cdot \cos\gamma = a \cdot |\cos\gamma|;$$

- в треугольнике EDC , применяя теорему косинусов, получим то же самое выражение (1), и, с учетом теоремы косинусов для тупоугольного треугольника ABC , окончательно придем к выражению (2).

Для прямоугольного треугольника ABC , где $\gamma = 90^0$, высоты BC и AD пересекаются в одной точке C (C вершина прямого угла, точки C , D и E совпадают), из-за чего и длина



искомого отрезка ED равна нулю. Этот результат подтверждается соотношением

$$d = c \cdot |\cos\gamma| = c \cdot |\cos 90^0| = 0.$$

Длина отрезка, соединяющего точки основания высот CF и $AC(BC)$ легко определяется из известного соотношения для высоты прямоугольного треугольника, опушенной из прямого угла:

$$CF = h = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Итак, для вычисления длины отрезка, соединяющего точки основания двух высот треугольника в общем случае получим формулу

$$d = c \cdot |\cos\gamma|. \qquad (3)$$

Это соотношение имеет некую аналогию с теоремой синусов. Этот результат мной получен весной 2007 года. После этого я долго и упорно искал такой же результат в самых разных учебниках, справочниках и задачниках по геометрии как для школ, так и для вузов. Неоднократные запросы в всемирно известных поисковых системах и интернет-порталах Google, Yahoo!, Yandex, Апорт и других также не дали положительного результата. Поэтому я считаю себя справедливым назвать утверждение:

в произвольном треугольнике отношение длины** (d) **отрезка, соединяющей точки пересечения двух высот с противоположными сторонами к длине** (c) **третьей стороны величина постоянная и равна косинусу угла** $(\cos\gamma)$**, стоящего напротив этой стороны

теоремой Экелекяна Варужана.

Для обратной связи предлагаю мой адрес электронной почты и название моего сайта:

e-mail: hekevar@gmail.com; hekevar@hotmail.com,
www.hekelekian.com

Экелекян Варужан Левонович

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры теоретической физики физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова,
профессор Сиракузского университета (штат Нью-Йорк, США)