

От геометрии к экспериментальной работе по физике...

---

## От геометрии к экспериментальной работе по физике и обратно к задаче построения геометрии

Экелекян Варужан Левонович,  
заведующий лабораторией физики;  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры теоретической физики  
физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова

Долгое время автор этой работы ищет (и что удивительно, иногда находит) геометрические задачи, в которых существует гармонический переход от математики к экспериментальной физике<sup>1</sup>. Не нарушая эту традицию, рассмотрим задачу № 892 из учебника геометрии<sup>2</sup>:

*Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению ее оснований.*

---

<sup>1</sup> В.Л.Экелекян. **Интегрированная лабораторная работа по информатике, математике и физике** 2004 № 37 ИНФОРМАТИКА; **Решение некоторых математических задач с помощью программ Microsoft Office** 2004 № 45 ИНФОРМАТИКА, 2004 № 46 ИНФОРМАТИКА; **Определение центра масс неправильного тела** Физика № 48/04; **Проверка уравнения теплового баланса** Физика № 29/04; **Относительность движения** Физика № 1/06; **На урок геометрии с рычажными весами**, [www.math.ru](http://www.math.ru); **Задачи геометрического построения с помощью компьютера**, [www.math.ru](http://www.math.ru)

<sup>2</sup> **Геометрия**, 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений [Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.]. – 20-е изд. М. : Просвещение, 2010.

От геометрии к экспериментальной работе по физике...

**Дано:**

$ABCD$  – прямоугольная трапеция,

$AB \perp AD$ ,

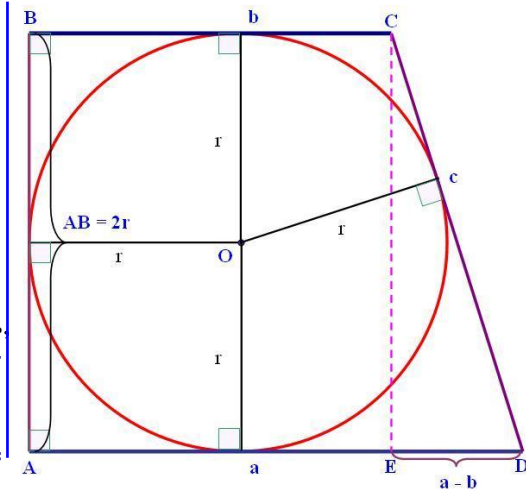
$BC = b$ ,

$AD = a$ ,

$\text{Окр}\{O; r\}$  – вписанная в трапецию окружность.

**Доказать:**

$$S_{ABCD} = a \cdot b$$



**Доказательство:**

За основу примем три факта из геометрии, хорошо известные ученикам уже в конце 8-го класса:

- Площадь трапеции равна произведению средней линии (полусумма оснований) трапеции на высоту

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h; \quad (1)$$

- Если в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, то сумма их противоположных сторон равна

$$AB + CD = BC + AD, \quad (2)$$

- Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

Трапеция  $ABCD$  прямоугольная, следовательно, высота трапеции совпадает с диаметром вписанной окружности –

$$h = AB = 2r. \quad (3)$$

Из вершины  $C$  трапеции опустим перпендикуляр к основанию:  $CE \perp AD$ . Полученный треугольник  $CED$  – прямоугольный, для которого справедлива теорема Пифагора. Отметим, что гипотенуза этого треугольника – это боковая

сторона трапеции  $c = CD$ , два катета – это соответственно

$$CE = AB = 2r \text{ и } DE = AD - BC = a - b. \quad (4)$$

Принимая во внимание весь перечисленный материал, приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = (a+b) \cdot r; \rightarrow \rightarrow (5.1) \\ 2 \cdot r + c = a + b; \rightarrow \rightarrow (5.2) \\ c^2 = (2r)^2 + (a-b)^2. \rightarrow \rightarrow (5.3) \end{array} \right.$$

Решая последние два уравнения, приходим к следующему соотношению:

$$r \cdot (c + 2r) = ab, \Rightarrow r \cdot (a + b) = a \cdot b, \quad (6)$$

откуда и следует доказательство теоремы:

(7)

Дополнительно отметим замечательное свойство длин оснований трапеции и радиуса вписанной окружности:

(8)

Итак, получается следующая ситуация – в плоскости можно рисовать сколько угодно трапеций, однако если к этим трапециям приложить два ограничения (условий):

- чтобы трапеция была прямоугольная;
  - чтобы в нее можно было вписать окружность,
- то они приобретают новые качества (свойства) –
- отношение произведения оснований трапеции к площади становится постоянной величиной

$$\frac{a \cdot b}{S_{ABCD}} = const, \quad (9)$$

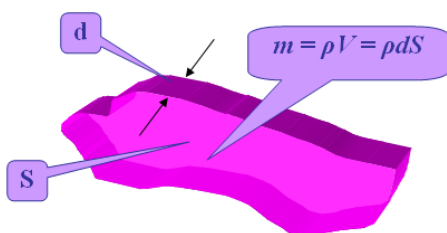
От геометрии к экспериментальной работе по физике...

- эта трапеция становится равновеликой к прямоугольнику со сторонами, равными основаниям трапеции

$$S_{\text{трапеция}} = S_{\text{прямоугольник}}, \quad (10)$$

- в геометрии не часто встречается обстоятельство, когда обратная величина одного геометрического понятия (в нашем случае – радиус вписанной окружности  $r$ ) представляется в виде суммы обратных величин двух других геометрических понятий (основания  $a$  и  $b$  трапеции)

### Связь геометрии с физическим экспериментом



ного (гомогенного) тела, имеющего постоянную толщину  $d$  прямо пропорциональна его площади  $S$ .

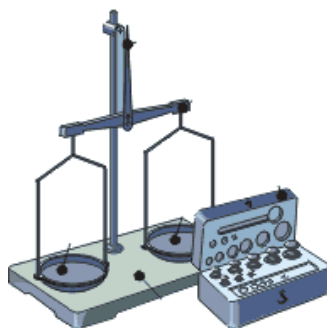
$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot d.$$

В этой формуле  $\rho$  – плотность вещества,  $V$  – объем тела, причем предполагаются

$\rho = const$  и  $d = const$  по всему телу. То есть если на чашах рычажных весов поместить фигуру, вырезанную из бумаги, балансировать гирьками - взвешивать данный фрагмент тела, то получим представление его площади.

Переедем теперь к экспериментальной части нашей задачи.

Известно, что масса  $m$  (вес  $P = m \cdot g$ , где  $g$  - ускорение свободного падения) однород-



Приведем алгоритм действий, который предлагается учащимся групп дополнительного образования и общеобразовательных школ в качестве лабораторной работы:

1. раздаются листочки чистой бумаги формата А4; ножницы, карандаши, простые линейки, линейки треугольные, циркуль;
2. объясняется способ нанесения двух параллельных линий с помощью двух треугольных линеек; и способ оптимального построения двух (трех) прямоугольных трапеций;
3. с помощью линейки измеряется основания трапеций и результаты измерения карандашом записываются прямо на трапеции;
4. с помощью ножниц аккуратно разрезается трапеция (объект I);
5. отдельно строится прямоугольник сторонами  $a$  и  $b$ . С помощью ножниц аккуратно разрезается прямоугольник (объект II);
6. с помощью рычажных весов взвешивается массу трапеции и прямоугольника, а результаты измерения карандашом записываем прямо на объектах;
7. с помощью простого арифмометра осуществляется

вычисление отношения  $\frac{a \cdot b}{m_{\text{трапеция}}}$ , которое должно

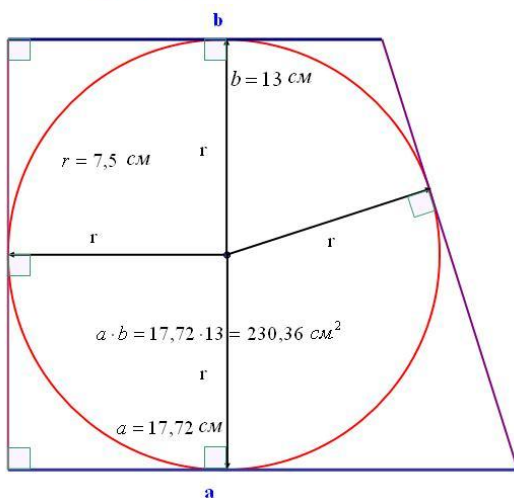
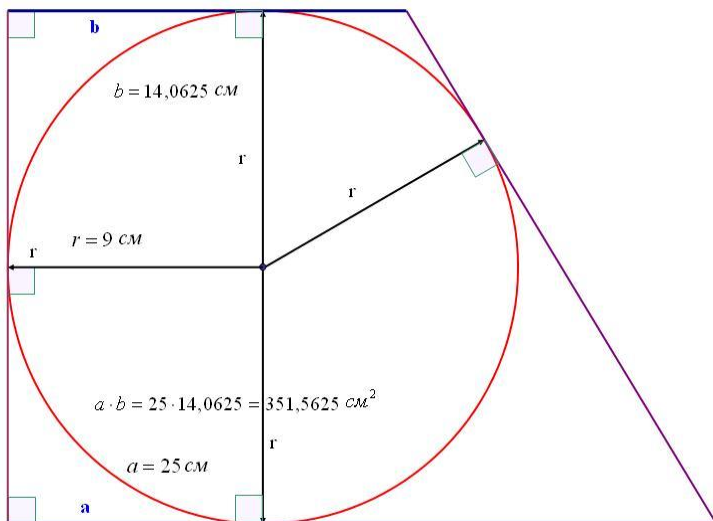
быть постоянным;

8. отдельно сравниваются массы объектов I и II.

Этот опыт ученик может осуществить несколько раз. Можно работать в группе из нескольких учеников. Во всех случаях изучаемое отношение (9) площади трапеции к ее массе должно давать очень близкое значение для данного выбора бумаги. Рекомендуется проведение статистики – вычисление среднего значения и среднеквадратичного отклонения.

От геометрии к экспериментальной работе по физике...

Для учеников более старших классов желательно применение персонального компьютера с программами Microsoft Word и Microsoft Excel. В программе Word они могут в режиме «Рисование» получить несколько экземпляров необходимого материала, подобно следующему образцу:



От геометрии к экспериментальной работе по физике...

Если ученик умеет работать в программе Microsoft Excel, обладает навыками использования арифметических действий, дополнительными свойствами **Копирования и Вставки, распространения полученной формулы, обращения к условной и безусловной адресации, элементами работы статистической обработки**, то он может всю вторую часть работы реализовать согласно программе, приведенной ниже:

|    | A     | B         | C         | D            | E        | F        | G              | H             | I                           | J                           | K              | L        | M        | N        | O        | P        | Q         | R | S |
|----|-------|-----------|-----------|--------------|----------|----------|----------------|---------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|---|---|
| 1  | номер | значения  | значения  | значения     | значения | значения | значения       | значения      | значения                    | значения                    | значения       | значения | значения | значения | значения | проверка | сравнение |   |   |
| 2  | опыта | стороны a | стороны b | произведения | а*б      | трапеции | прямоугольника | $\frac{a}{b}$ | r                           | $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ | прямоугольника |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 3  |       | в см-ах   | в см-ах   | в кв см-ах   | в г-ах   | в г-ах   | $\frac{a}{b}$  | в см-ах       | $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ | и трапеции                  |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 4  |       |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 5  |       |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 6  | 1     | 25        | 14,0625   | 351,5625     | 2        | 2        | 175,78         | 9             |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 7  | 2     | 17,72     | 13        | 230,36       | 1        | 1        | 230,36         | 7,5           |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 8  | 3     |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 9  | 4     |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 10 | 5     |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 11 | 6     |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |
| 12 | 7     |           |           |              |          |          |                |               |                             |                             |                |          |          |          |          |          |           |   |   |

## Решение геометрической задачи построения

Отметим еще об одном моменте метода интегрированного подхода преподавания, когда производится визуализация и аккомодация таких предметов как физика, математика и информатики. На самом деле это реализация междисциплинарного понятия рефлексии, когда ученик от исходно поставленной геометрической задачи двигается к ее физическому пониманию, а потом опять возвращается к геометрической задаче. В данном случае это решение задачи построения, когда даны два отрезка  $(a, b)$  и нужно построить третий отрезок  $(r)$ , так что между длинами этих отрезков было справедливо следующее соотношение (8).

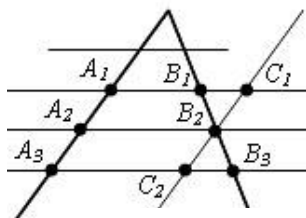
Числа  $(a, b, r)$  положительны, так как они представ-

От геометрии к экспериментальной работе по физике...  
 ляют собой длины отрезков. С другой стороны очевидно, что

$$r < a \text{ и } r < b.$$

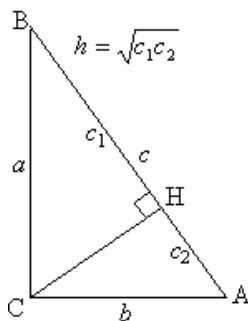
Для решения поставленной задачи нужны будут три теоремы:

**Теорема Фалеса** - если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне

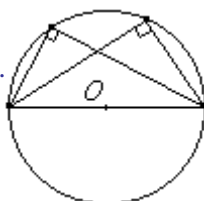


$$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3.$$

**Высота прямоугольного треугольника**, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна среднему геометрическому отрезков, на которые она разбивает гипотенузу:



$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2}.$$



**Вписанный угол**, опирающийся на диаметр, равен  $90^\circ$ .

Задачу решим для двух случаев, когда даны

1.  $(a, b)$  и нужно построить  $(r)$ ;
2.  $(a, r)$  и нужно построить  $(b)$ .

1. Представим величину  $r$  из соотношения (8) в виде:

$$r = \frac{ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}}{a+b} = \frac{h \cdot h}{a+b}, \text{ где } h = \sqrt{ab}.$$

Так как величина  $r$  представляется в виде отношения

$$\frac{r}{h} = \frac{h}{a+b},$$

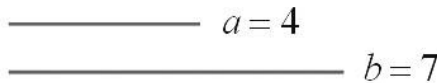


От геометрии к экспериментальной работе по физике...

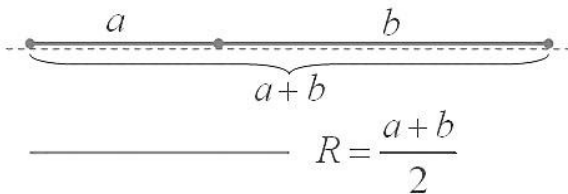
то целесообразно применить теорему Фалеса, предварительно определив длину отрезка  $h$  как среднее геометрическое отрезков  $a$  и  $b$ . Для этого рассмотрим окружность с радиусом  $R = \frac{a+b}{2}$ . Очевидно, что любой вписанный угол, опирающийся на диаметре  $(a+b)$  прямой. Построим тот вписанный прямой угол, проекция которого совпадает с концом отрезка  $a$  или с началом отрезка  $b$ . Тогда эта высота будет иметь длину  $h = \sqrt{ab}$ .

Ниже приведем последовательность действий, которая позволяет построить отрезок  $r = \frac{ab}{a+b}$  на основе заданных отрезков  $a$  и  $b$  с применением циркуля и линейки:

1. ввод отрезков  $a$  и  $b$  (числа в скобках носят условный характер)

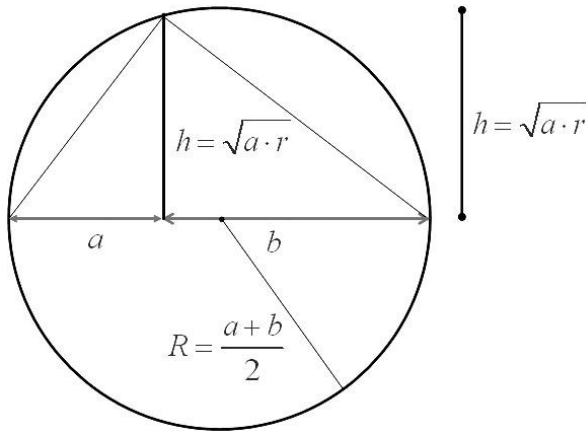


2. нахождение радиуса окружности

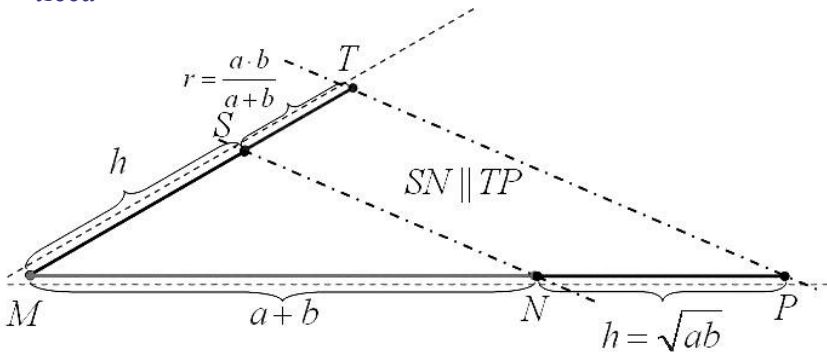


3. построение отрезка длиной среднее геометрическое значения

От геометрии к экспериментальной работе по физике...



4. нахождение искомого отрезка  $r$  с помощью теоремы Фалеса



1. Представим величину  $b$  из соотношения (8) в виде:

$$b = \frac{ar}{a-r} = \frac{m \cdot m}{a-r}, \text{ где } m = \sqrt{ar}.$$

Идея и алгоритм построения тот же, что в первом случае, только на этот раз  $m$  - это среднее геометрическое значение длин отрезков  $a$  и  $r$ , а в теореме Фалеса вместо отрезка  $(a+b)$  следует учитывать отрезок  $(a-r)$ .

Однако приведем еще один способ построения отрез-

От геометрии к экспериментальной работе по физике...

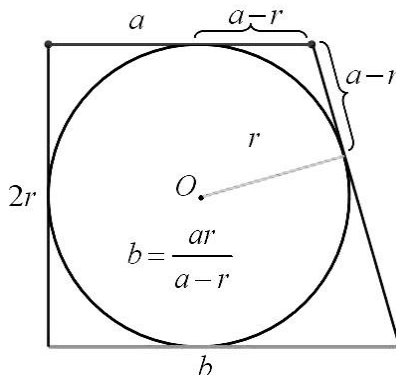
ка  $b$  на основе отрезков  $a$  и  $r$  с помощью первоначально поставленной задачи, связанной с прямоугольной трапецией, в которой вписана окружность. Для этого:

1. введем отрезки  $a$  и  $r$  (числа в скобках носят условный характер)

$$a = 7 \quad \text{_____}$$
$$r = 4 \quad \text{_____}$$

2. существенно используем факт того, что ученик восьмого класса хорошо владеет техникой построения с помощью циркуля и линейки а) двух параллельных линий, б) построения перпендикуляра к данной линии. Тогда он

- построит две параллельные прямые, которые находятся на расстоянии  $2r$ ;
- построит окружность, которая касается этих линий;
- построит боковую сторону трапеции, которая касается окружности и перпендикулярна основаниям;
- нанесет на одной стороне отрезок длиной  $a$  и с точки касания определит отрезок длиной  $a - r$ ;
- определит на окружности дугу, которая опирается на хорду с длиной  $a - r$ ;
- соединит эти точки и получит искомым отрезок длиной  $b$



От геометрии к экспериментальной работе по физике...