Экелекян Варужан Левонович
педагог физики, ГБОУ Лицей 1561, Москва

Помощь тем, кто сдает экзамен по физике и математике в формате ЕГЭ
1. Параллелограмм

Задача

В параллелограмме $ABCD$ проведена медиана BK треугольника ABK. Диагонали параллелограмма AC и BD пересекаются в точке O На параллельной AD стороне BC отмечена точка E, которая делит эту сторону в отношении $1:3$, считая с вершины B. Отрезок AE пересекается с медианой AK в точке P. Диагональ AC пересекается с медианой BK в точке Q. Доказать, что 1) $BP = PQ = QK$. Вычислить 2) отношение площади четырехугольника $ECOF$ к площади параллелограмма $ABCD$.

Дано:
$ABCD$ – параллелограмм,
$AD \parallel BC,\ AB \parallel CD,$
$[AC] \cap [BD] = O,$
$BE : EC = 1:3,$
$AK = KD,$
$[AE] \cap [BK] = P,$
$[AC] \cap [BK] = Q,$

Доказать:
$BP = PQ = QK;$

Найти:
$S_{ECOF} : S_{ABCD} = ?$

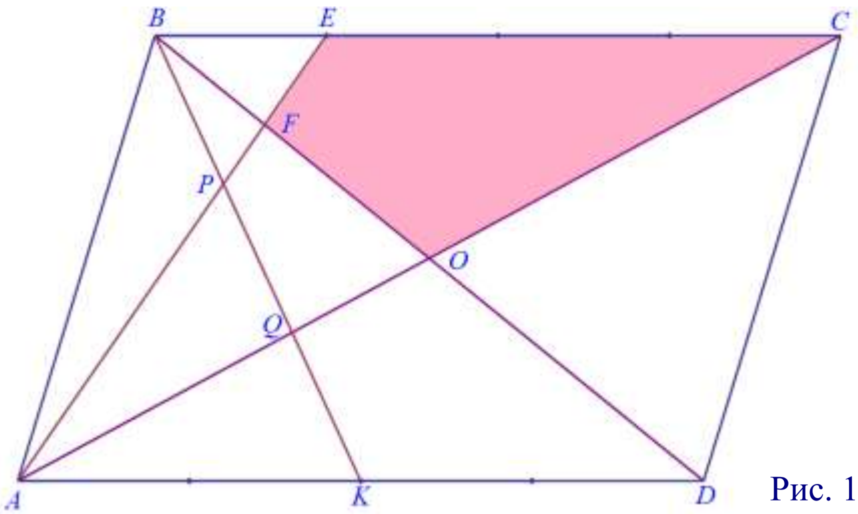

Рис. 1.

Решение:

При решении задачи нам будут необходимы следующие определения, понятия и теоремы:

1. медианы треугольника пересекаются в одной точке, и этой точкой медианы делятся в отношении $2:1$ считая с вершины треугольника;
2. диагонали параллелограмма пересекаются, и точка пересечения делит их пополам;
3. каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника (следовательно, делит параллелограмм на два равновеликих треугольника);
4. диагонали параллелограмма при пересечении делят его на четыре равновеликих треугольника;
5. если в двух треугольниках высоты равные, то отношение площадей треугольников равно отношению их оснований;
6. медиана треугольника делит его на две равновеликие части;
7. вертикальные углы равны;

8. подобные треугольники - треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного соответственно пропорциональны сторонам другого треугольника;
9. сходственные (или соответственные) стороны подобных треугольников - стороны, лежащие напротив равных углов;
10. коэффициентом подобия называют число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников;
11. если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны;
12. треугольники подобны, если хотя бы два угла в неком треугольнике соответственно равны двум углам в другом треугольнике;
13. отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

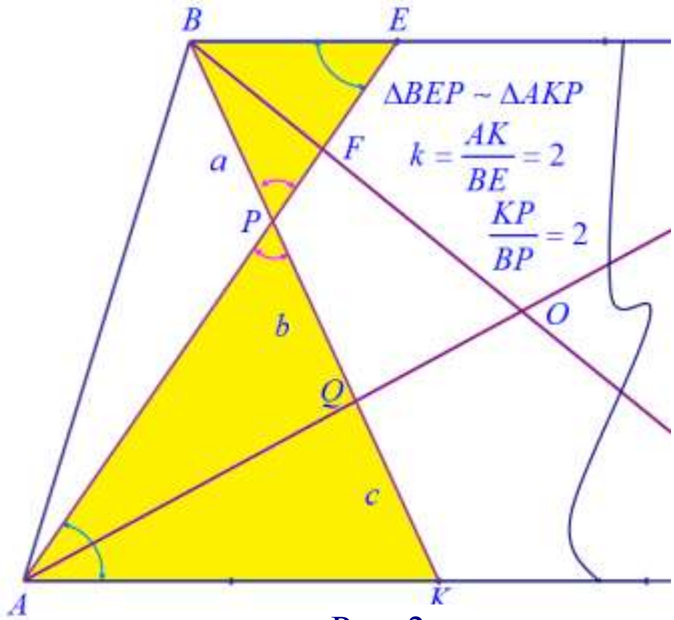

Рис. 2.

1. Введем следующие обозначения отрезков:

$$BP = a,\ PQ = b,\ QK = c.$$

По условиям задачи отрезок BK является медианой треугольника ABD.

Согласно свойств диагоналей (2) параллелограмма, отрезок AO также является медианой треугольника ABD.

Согласно свойств точки Q пересечения медиан треугольника (1) можем писать:

$$BQ = 2 \cdot QK, \text{ или } a + b = 2c.$$

Вертикальные углы $\angle BPE$ и $\angle APK$ равны (7). Внутренне накрест лежащие углы $\angle BEP$ и $\angle PAK$ равны (отрезки BC и AD параллельны (11)). Треугольники BPE и APK подобны (12) по двум равным углам с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AK}{BE} = 2$ (10), так как по условиям задачи $BE = \dfrac{BC}{4}$, а $AK = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2} = 2 \cdot BE$. Следовательно, $\dfrac{PK}{BP} = 2$ или, что то же самое, $b + c = 2a$. Решая систему уравнения

$$\begin{cases} a + b = 2c, \ \Rightarrow \ a + b + c = 3c, \\ b + c = 2a, \ \Rightarrow \ a + b + c = 3a, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = c,$$

получим $$a = b = c.$$

2. Пусть площадь параллелограмма равна $S_{ABCD} = 48S$. Тогда (3)

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BCD} = 24S,$$

а также (4)

$$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta BCO} = S_{\Delta CDO} = S_{\Delta DAO} = 24S.$$

Так как BK является медианой треугольника ABD, то (6)

$$S_{\Delta ABK} = S_{\Delta BDK} = 12S.$$

Треугольники ABP, APQ и AQK имеют одинаковую высоту и одинаковые основания, следовательно – одинаковые площади (8):

$$S_{\Delta ABP} = S_{\Delta APQ} = S_{\Delta AQK} = \frac{S_{\Delta ABK}}{3} = 4S.$$

Треугольник ACD состоит из треугольников AQK, CDO и четырехугольника $KQOD$. Следовательно, площадь этого четырехугольника будет равна:

$$S_{KQOD} = S_{\Delta ACD} - \left(S_{\Delta AQK} + S_{\Delta CDO}\right) = 24S - (12S + 4S) = 8S.$$

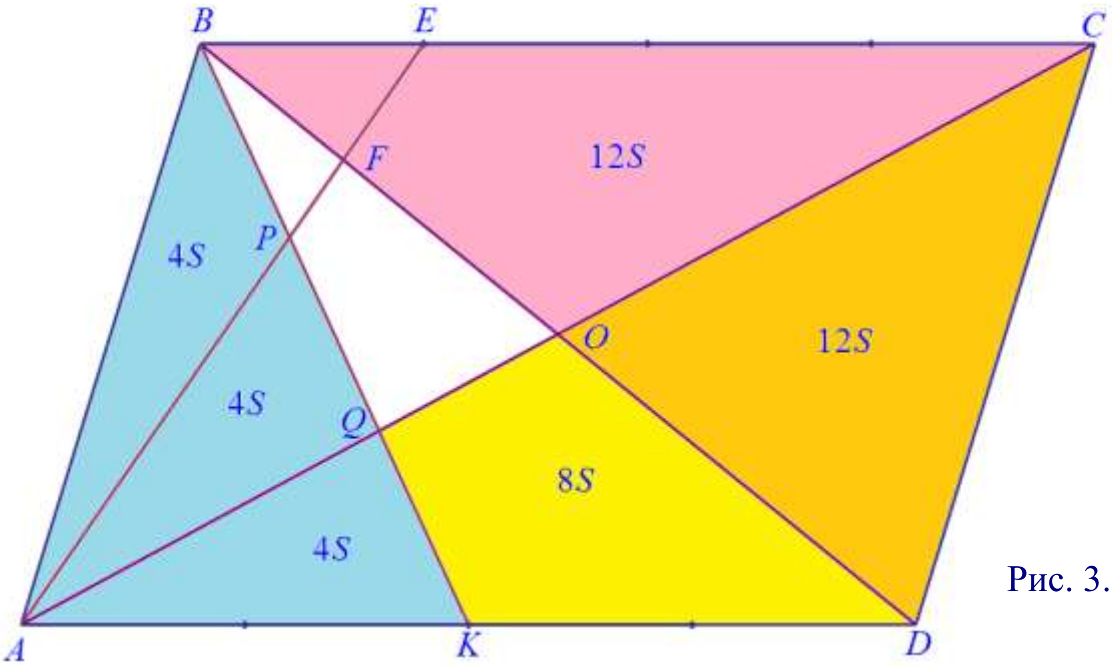

Рис. 3.

Треугольники BEP и APK подобны с коэффициентом подобия $k = 2$ (10), следовательно, $\frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta BEP}} = k^2 = 4$ (13), а так как $S_{\Delta APK} = 2 \cdot 4S = 8S$, то

окончательно получим: $$S_{\Delta BEP} = 2S.$$

Вертикальные углы $\angle BFE$ и $\angle AFD$ равны (7). Внутренне накрест лежащие углы $\angle FBE$ и $\angle FDA$ равны (отрезки BC и AD параллельны (11)). Треугольники BFE и AFD подобны (12) по двум равным углам с коэффициентом подобия $k_0 = \dfrac{AD}{BE} = 4$ (10), так как по условиям задачи $BE = \dfrac{BC}{4}$. Следовательно, $\dfrac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta BEF}} = k_0^2 = 16$ (13) .

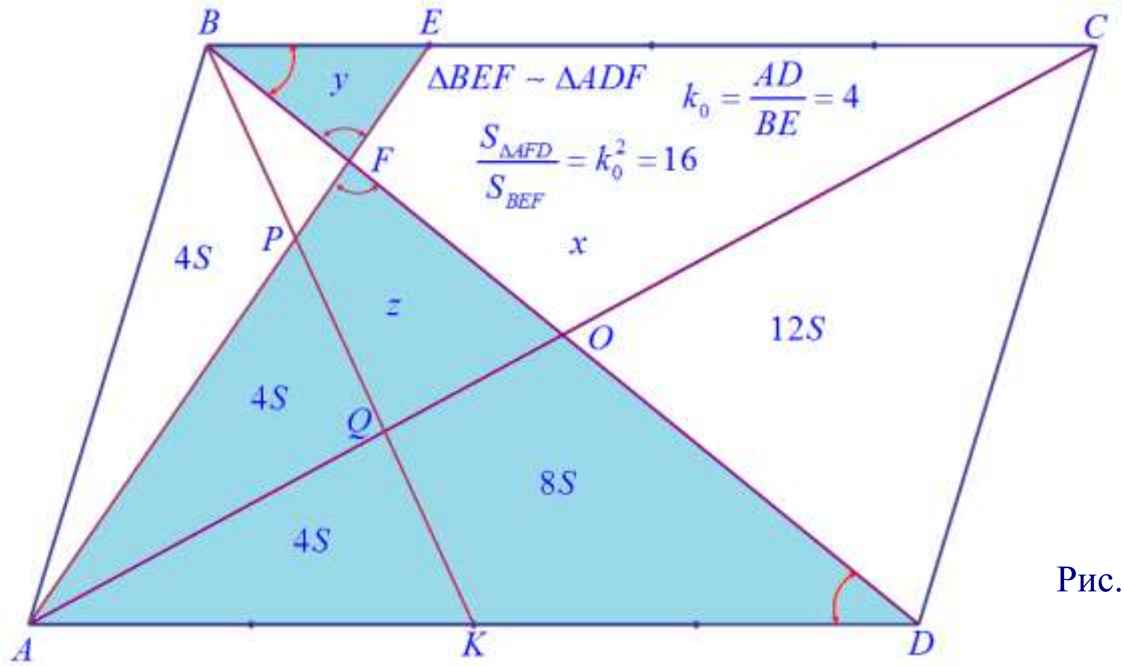

Рис. 4.

Введем следующие обозначения для площадей:

$S_{\Delta BEF} = y,\ S_{QPFO} = z$ и площадь искомого четырехугольника $S_{ECOF} = x.$

Тогда легко видеть соотношения между переменными y и z :

$$\begin{cases} 16y = 16S + z, \\ 2S - y + z + 8S = 12S, \end{cases} \qquad \begin{cases} z + 16S = 16y, \\ z - y = 2S, \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$y = \frac{6S}{5}, \qquad z = \frac{16S}{5}.$$

Искомая площадь четырехугольника $ECOF$ и отношение площадей четырехугольника и параллелограмма получим из очевидных соотношений:

$$x + y = 12S, \qquad x = \frac{54S}{5}, \qquad \frac{S_{ECOF}}{S_{ABCD}} = \frac{x}{48S} = \frac{9}{40}.$$

Ответ: $0{,}225.$